

**Über diejenigen topologischen
Vektorräume N , für die X/N
bei vollständigem topologischen Vektorraum X
stets vollständig ausfällt**

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

Vorgelegt von
Friedrich Christian Schmerbeck
aus Geisenfeld/Pfaffenhofen

Eingereicht im Mai 1986



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547927_0089

Über diejenigen topologischen Vektorräume N , für die
 X/N bei vollständigem topologischen Vektorraum X stets
vollständig ausfällt.

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

Vorgelegt von
Friedrich Christian Schmerbeck
aus Gelsenfeld/Pfaffenhofen

Eingereicht im Mai 1986

1. Berichterstatter: Professor Dr. W. Roelcke
2. Berichterstatter: Professor Dr. V. Eberhardt

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Februar 1987

Für Sabine

Einleitung

Den historischen Ausgangspunkt dieser Arbeit bildet ein Resultat von S. Banach, das besagt, daß der Quotient eines Banachraums X nach einem abgeschlossenen Teilraum N wieder ein Banachraum ist. Daß dies nicht trivial ist, zeigt ein Beispiel von G. Köthe. Köthe konstruierte einen vollständigen lokalkonvexen Vektorraum X , der einen unvollständigen Quotienten besitzt. Eine Reihe modernerer Untersuchungen verschiedener Autoren konzentrierten sich auf die Frage, wann ein Raum X erblich vollständig ist.

Die Aussage von Banach wurde jedoch auch in anderer Hinsicht verallgemeinert. Insbesondere ist der Quotient einer vollständigen kommutativen topologischen Gruppe X nach einer Untergruppe N vollständig, falls die Relativtopologie auf N halbmetrisierbar ist. Nach einer Arbeit von Geller und Kenderov genügt sogar, daß N fast metrisierbar ("almost metrizable") ist. Wigner und Roelcke zeigten unabhängig voneinander, daß X/N bereits vollständig ist, falls N isomorph zu einem Produkt halbmetrisierbarer kommutativer topologischer Gruppen ist.

Dieses und weitere Resultate von Wigner gaben schließlich den Anlaß zu den Untersuchungen der vorliegenden Arbeit. Als Arbeitsbegriff nennen wir in dieser Arbeit eine kommutative topologische Gruppe N einen *guten Nenner*, wenn X/N vollständig ist für jede vollständige kommutative topologische Gruppe X , in die N einbettbar ist. Untersucht werden soll, wann eine kommutative topologische Gruppe ein guter Nenner ist, bzw. wann sie es nicht ist. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Untersuchung lokalkonvexer topologischer Vektorräume, wobei die Ergebnisse von Wigner zeigen, daß dabei irrelevant ist, ob man für die "Zähler" X nur vollständige lokalkonvexe topologische Vektorräume oder beliebige vollständige kommutative topologische Gruppen zuläßt. Ein großer Teil der Ergebnisse dieser Arbeit konnte jedoch ohne zusätzlichen Aufwand auf die Klasse der kommutativen topologischen Gruppen ausgedehnt werden.

Ein überraschendes Phänomen der vorliegenden Untersuchungen ist, daß über ZFC hinausgehende Axiome wirksam werden. Teils sind diese Axiome "beweistechnisch" nötig, ohne daß die Unabhängigkeit der zugehörigen Resultate von ZFC gezeigt werden konnte. Teils konnten jedoch Räume konstruiert werden, bei denen die Eigenschaft "guter Nenner" in ZFC unentscheidbar ist.

Im einzelnen wurden vor allem folgende Resultate erzielt:

- Es existieren lokalkonvexe topologische Vektorräume, die unter der Annahme der Kontinuums-hypothese CH keine guten Nenner, jedoch unter deren Negation und gleichzeitiger Annahme des Martin Axioms MA gute Nenner sind (siehe 2.10 (3)).
- φ , der abzählbar dimensionale Vektorraum mit der feinsten lokalkonvexen Topologie, ist unter der Annahme der Kontinuums-hypothese kein guter Nenner. Dies hat zur Konsequenz, daß die große Klasse der Räume, die φ als komplementierten Teilraum enthält, ebenfalls unter CH keine guten Nenner enthält. (Siehe 3.5).
- Nimmt man die Gültigkeit des mengentheoretischen Axioms $\mathfrak{d}^*$ an, so ist $\mathbb{K}^{(\omega)}$ versehen mit jeder vollständigen separierten Vektorraumtopologie kein guter Nenner (siehe 6.9). $\mathbb{K}$ bezeichnet dabei hier und im folgenden stets den Skalkörper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.
- Die Klasse der guten Nenner ist abgeschlossen unter der Bildung spezieller projektiver Limiten, wobei diese Limesbildung insbesondere die Bildung beliebiger Produkte umfaßt (siehe 5.2).
- Betrachtet man ein Erzeugendensystem aus halbmetrisierbaren Gruppentopologien für die Topologie eines gegebenen Raumes, so wird eine hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß ein guter Nenner vorliegt. Dabei besitzen beliebige Produkte fast metrisierbarer kommutativer topologischer Gruppen ein Erzeugendensystem, das dieser Bedingung genügt (siehe 5.5).
- Durch ein Beispiel wird gezeigt, daß diese Bedingung auch tatsächlich neue gute Nenner erschließt, und zwar sogar innerhalb der Klasse der lokalkonvexen topologischen Vektorräume (siehe 7.5).
- Unter starken mengentheoretischen Zusatzannahmen ($\mathfrak{d}^*$) wird gezeigt, daß die genannte Bedingung auch notwendig ist, sofern man sich auf separable topologische Vektorräume mit Charakter ω_1 beschränkt (siehe 6.5).

Ich danke Herrn Professor W. Roelcke für die Stellung dieses Themas sowie für seine ständigen Anregungen, den Herren Professor V. Eberhardt und Professor H. Pfister für ihre stets aktiven Diskussionsbeiträge. Erwähnt werden muß auch Herr Professor W. Zimmermann für den entscheidenden Hinweis auf eine Arbeit von P. C. Eklof.

Nicht zuletzt danke ich meiner Frau, Sabine, für die entgegengebrachte Toleranz, die ein Promovierender ständig fordert.

Inhaltsverzeichnis

	Einleitung	I
0	Umfeld	1
1	Vollständigkeitskriterien bei Anwesenheit einer geeigneten Hilfstopologie	14
2	ω_1 -Folgenräume	21
3	Der Raum φ	37
4	Projektive κ -Systeme: Definitionen und Hilfsaussagen	41
5	Surjektive gesättigte projektive κ -Systeme	48
6	Nicht surjektive gesättigte projektive κ -Systeme	56
7	Ergänzungen	67
8	Literatur	79

0 Umfeld

Dieser Abschnitt bringt Definitionen und Aussagen, die den Hintergrund dieser Arbeit bilden.

Zuerst definieren wir die in dieser Arbeit untersuchte Eigenschaft:

0.1 Definition:

Eine kommutative topologische Gruppe (kurz "komTG") N heißt "guter Nenner" (Gegenteil "schlechter Nenner")

$\Leftrightarrow$ Für jede vollständige komTG mit $N \hookrightarrow Z$ ist Z/N vollständig.

0.2 Bemerkung:

- (1) Offensichtlich kann man sich für die Untersuchung der Eigenschaft "guter Nenner" auf separierte vollständige komTG zurückziehen:

Eine komTG ist genau dann guter Nenner, wenn ihre assoziierte separierte vollständige Hülle dies ist.

- (2) Unter Vorgriff auf 0.4 ist ein topologischer Vektorraum N (kurz "TVR") bzw. ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum (kurz "LVR") genau dann guter Nenner (als komTG aufgefaßt), wenn gilt:

Für jeden vollständigen TVR (bzw. LKR) Z mit $N \hookrightarrow Z$ ist Z/N vollständig.

Entsprechendes gilt für andere Teilklassen $\mathfrak{A}$ der komTG, sofern $\mathfrak{A}$ folgender Bedingung genügt:

Zu $X \in \mathfrak{A}$ existiert eine Familie $(X_i)_{i \in I}$ vollständiger halbmetrisierbarer Räume $X_i \in \mathfrak{A}$ mit $X \hookrightarrow \prod_{i \in I} X_i$.

0.3 Satz

Sei N eine komTG und es gelte

N ist halbmetrisierbar

oder allgemeiner

N ist Produkt halbmetrisierbarer komTG.

Dann ist N ein guter Nenner.

Beweis:

Für halbmetrisierbares N siehe [12, Th 2], man vergleiche auch [4], [9, Th 11.17], [10, Th 13.17] oder 0.13.

Der Beweis des allgemeinen Falles geht auf Wigner [12, Th 3] zurück, man vergleiche auch [9, Th 11.22]. Als "Abfallprodukt" erhalten wir dieses Resultat auch in 7.8. $\square$

Motivierend für die Definition 0.1 und ständiger Blickwinkel der Beweismethoden dieser Arbeit ist folgender Satz von Wigner [12, Th 4]:

0.4 Satz

Sei Z ein Produkt vollständiger metrisierbarer komTG und sei N eine abgeschlossene Untergruppe von Z . Dann gilt:

N ist guter Nenner $\Leftrightarrow Z/N$ ist vollständig.

Beweis:

Siehe [12, Th 4] oder auch 0.15 (unter Beachtung von 0.3 2.Teil). $\square$

Man beachte, daß zu jeder vollständigen separierten komTG N ein Ober-
raum Z existiert, der ein Produkt metrisierbarer vollständiger komTG ist.
Weiterhin beachte man die Bemerkung 0.2 (1) für eine Verallgemeinerung
auf nicht vollständige bzw. nicht separierte Räume N .

Wir fassen die folgenden (im wesentlichen bekannten) Aussagen
zusammen:

0.5 Satz

*Sei N eine vollständige separierte komTG. Sei Z ein vollständiger
separierter guter Nenner.*

Es gelte:

(1) N ist metrisierbar

oder

(2) N ist Produkt guter Nenner

oder

(3) $N \hookrightarrow Z$ und Z/N ist vollständig

oder (insbesondere)

(4) N ist komplementierter Teilraum von Z .

Dann ist N ein guter Nenner.

Wir haben uns in Satz 0.5 im Sinn der Bemerkung 0.2 (1) auf vollständige
separierte komTG zurückgezogen.

Beweis:

(1) Siehe 0.3.

(2) Wigners Beweis zu 0.3 kann wörtlich übertragen werden.

Alternative:

Sei $N = \prod_{i \in I} Y_i$ mit guten Nennern Y_i ($i \in I$). Sei für $i \in I$ Z_i ein Produkt vollständiger metrisierbarer komTG mit $Y_i \hookrightarrow Z_i$. Dann ist Z_i/Y_i vollständig und damit auch $(\prod_{i \in I} Z_i)/N \cong \prod_{i \in I} (Z_i/Y_i)$.

(3) Wigners Beweis zu 0.4 kann wörtlich übertragen werden. Wir bringen einen auf der gleichen Idee beruhenden Beweis in 0.15.

(4) Folgt direkt aus (3). $\square$

Für einen vollständigen separierten guten Nenner Z gilt nach 0.5:

Z ist erblich vollständig $\Leftrightarrow$ Jede abgeschlossene Untergruppe N von Z ist guter Nenner.

Mir ist jedoch kein nicht metrisierbarer, vollständiger separierter TVR Z bekannt, der gleichzeitig guter Nenner und erblich vollständig ist.

Der folgende Satz ist elementar beweisbar:

0.6 Satz

Sei X eine vollständige separierte komTG und sei Y eine abgeschlossene Untergruppe von X . dann gilt:

Y guter Nenner und X/Y guter Nenner $\Rightarrow X$ guter Nenner.

Beweis:

Sei Z eine vollständige komTG mit $X \hookrightarrow Z$. Dann ist

$$Z/X \cong (Z/Y)/(X/Y)$$

also vollständig. $\square$

Mengentheoretisches Umfeld

Wir benötigen einige mengentheoretische Begriffe, Axiome und Techniken. Wir halten uns dabei soweit als möglich an die üblichen Schreibweisen. Als Bezug sei auf [7] und für eine Darstellung der im Bereich des Axioms $V=L$ liegenden Aussagen auf [1] verwiesen.

Insbesondere bezeichnet ω (oder ω_0) die erste unendliche Kardinalzahl, ω_1 die erste überabzählbare Kardinalzahl. Kardinalzahlen werden stets als Ordinalzahlen aufgefaßt. Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit ω identifiziert. Grundsätzlich werden die Zermelo-Frankel Axiome vorausgesetzt, das Auswahlaxiom wird ohne Hinweis verwendet. Über ZFC hinausgehende Axiome werden, falls verwendet, explizit angegeben.

0.7 Definition

(1) LIM bezeichnet die Klasse der Limesordinalzahlen.

(2) $\Omega_1 := \omega_1 \cap \text{LIM}$.

(3) Sei $x \in \text{LIM}$, dann

$$\text{cf}(x) := \min \{ |C| : C \subset x \text{ und } \sup C = x \}.$$

(4) Eine Kardinalzahl $x > \omega_1$ heißt regulär, falls $\text{cf}(x) = x$ ist.

(5) Sei $x \in \text{LIM}$ und $C \subset x$, dann heißt C "Club" (in x)

$$\Leftrightarrow \sup C = x \text{ und } \forall \alpha < x \sup(C \cap \alpha) \in C \cup \{0\}.$$

(6) Sei $x \in \text{LIM}$ mit $\text{cf}(x) > \omega$ und sei $S \subset x$, dann heißt S "stationär" (in x)

$$\Leftrightarrow \text{Für jeden Club } C \text{ in } x \text{ ist } C \cap S \neq \emptyset.$$

0.8 Definition

Sei $(X, \leq)$ eine prägeordnete Menge, dann:

(1) $x, y \in X$ sind "kompatibel" $\Leftrightarrow \exists z \in X$ $x \leq z$ und $y \leq z$.

(2) $A \subset X$ ist "Antichain" $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, x \not\leq y$ x, y sind nicht kompatibel.

(3) X erfüllt "c.c.c" ("countable chain condition")

$$\Leftrightarrow \text{Jede Antichain in } X \text{ ist abzählbar.}$$

(4) $D \subset X$ ist dicht $\Leftrightarrow \forall x \in X \exists y \in D$ $x \leq y$

(5) $F \subset X$ ist Filter

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in F \exists z \in F \quad x \leq z, y \leq z \quad \text{und} \quad \forall x \in F \quad \forall y \in X (y \leq x \Rightarrow y \in F).$$

0.9 Definition

(1) $V = L$ bezeichnet das Konstruierbarkeitsaxiom.

(siehe [1, Ch II §2] oder [7, Ch VI]).

(2) ϕ^* bezeichnet das folgende Axiom:

Es existiert eine Familie $(S_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ mit $S_\alpha \subset 2^\alpha$, $|S_\alpha| \leq \omega$ ($\alpha \in \omega_1$),
so daß für jedes $x \in \omega_1$ ein Club C in ω_1 existiert mit $\forall_{\alpha \in C} x \cap \alpha \in S_\alpha$.

(3) ϕ bezeichnet das folgende Axiom:

Es existiert eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ mit $x_\alpha \subset \alpha$ für $\alpha \in \omega_1$,
so daß für jedes $x \in \omega_1$ die Menge $\{\alpha \in \omega_1 : x \cap \alpha = x_\alpha\}$
stationär in ω_1 ist.

(4) CH bezeichnet die Kontinuumshypothese $2^\omega = \omega_1$.

(5) weak ϕ bezeichnet das folgende Axiom:

Zu jeder Familie $(P_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ mit $P_\alpha \subset 2^\alpha$ ($\alpha \in \omega_1$) existiert
 $z \in \omega_1$, so daß für jedes $x \in \omega_1$ die Menge
 $\{\alpha \in \omega_1 : x \cap \alpha \in P_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in z\}$ stationär in ω_1 ist.

(6) MA ("Martin Axiom") bezeichnet das folgende Axiom:

Ist X eine nicht leere prägeordnete Menge, die c.c.c. erfüllt und ist $\mathcal{D}$
eine Familie dichter Teilmengen von X mit $|\mathcal{D}| < 2^\omega$, so existiert ein
Filter G in X mit $\forall D \in \mathcal{D} \quad D \cap G \neq \emptyset$.

Das Axiom "weak ϕ " findet man z.B. in [2] oder [3]. Die angeführten
Axiome sind jeweils unabhängig von ZFC, es gilt

$$V=L \Rightarrow \phi^* \Rightarrow \phi \Rightarrow CH \Rightarrow 2^\omega < 2^{\omega_1} \Rightarrow \text{weak } \phi$$

sowie

$$CH \Rightarrow MA.$$

Hierbei ist keine Implikation umkehrbar. Außerdem gilt:

$$MA + \text{weak } \phi \Rightarrow CH.$$

Das folgende Lemma ist kennzeichnend für die Funktion der Begriffe "Club" und "stationär":

0.10 Lemma

(1) Löwenheim-Skolem Theorem

Sei $\kappa > \omega$ eine Kardinalzahl mit $cf(\kappa) > \omega$. Sei $f: \kappa \rightarrow \kappa$ eine Abbildung. Dann ist die Menge $\{\alpha \in \kappa: \forall \iota < \alpha \ f(\iota) < \alpha\}$ ein Club in κ .

(2) Pressing Down Lemma

Sei $\kappa > \omega$ eine reguläre Kardinalzahl und S eine stationäre Teilmenge von κ . Sei $f: S \rightarrow \kappa$ eine Abbildung mit $f(\alpha) < \alpha$ für jedes $\alpha \in S$. Dann existiert ein $\alpha \in \kappa$, so daß die Menge $\{\iota \in S: f(\iota) = \alpha\}$ stationär in κ ist.

Beweis: Siehe [7, Ch II 6.13, 6.15].

Stillschweigend wird der folgende Sachverhalt verwendet:

0.10a Lemma

Sei $\kappa \in \text{LIM}$, $cf(\kappa) > \omega$. Seien C_1 und C_2 Clubs in κ , sei S eine stationäre Menge in κ . Dann ist $C_1 \cap C_2$ ein Club, und $S \cap C_1$ ist stationär.

Beweis:

Die erste Behauptung ist ein Spezialfall von [7, CH II 6.8 (a)].

Um zu sehen, daß $S \cap C_1$ stationär ist, betrachte man nach Definition einen beliebigen Club C und zeige, daß $S \cap C_1 \cap C \neq \emptyset$ ist. Dies gilt, da $C_1 \cap C$ ein Club und S stationär ist. $\square$

Einfache Hilfsaussagen

Wir kehren zur Frage der Vollständigkeit von Quotienten zurück. Die folgenden Hilfsaussagen stehen bei vielen Aussagen und Beweistechniken im Hintergrund.

0.11 Lemma

Sei X eine komTG und N eine Untergruppe von X . Seien $f \subset t$ Gruppentopologien auf X . Es gelte

$$f|_N = t|_N \quad \text{und} \quad f/N = t/N.$$

Dann ist $f = t$.

Beweis: (Vergleiche [9, 11.23])

Sei $U \in \mathcal{U}_0(t)$. Wir wählen $U' \in \mathcal{U}_0(t)$ mit $U' + U' \subset U$.

Wegen $f|_N \supset t|_N$ existiert ein $V \in \mathcal{U}_0(f)$ mit $(V-V) \cap N \subset U'$.

Wegen $f/N \supset t/N$ und $f \subset t$ ist $W := V \cap (U' \cap V + N) \in \mathcal{U}_0(f)$.

Wir zeigen $W \subset U$ (und damit die Behauptung):

Sei $x \in W$. Es existiert $y \in U' \cap V$, $z \in N$ mit $x = y + z$.

Somit ist $z = x - y \in (V - V) \cap N \subset U'$ und $x = y + z \in U' + U' \subset U$.

0.12 Lemma

Sei X eine komTG, N eine Untergruppe von X und $q: X \rightarrow X/N$ die Quotientenabbildung. Sei $\tilde{X}$ eine vollständige Hülle von X und sei $\tilde{X}/N$ vollständig.

Dann existiert zu jedem Cauchyfilter $\mathfrak{F}$ in X/N ein Cauchyfilter $\mathcal{O}$ in X mit $q(\mathcal{O}) \supset \mathfrak{F}$.

Beweis: (Vergleiche [9, Ch II Ex 10])

Sei $z \in X$ mit $\mathfrak{F} \rightarrow z + N$. Sei $\mathcal{O}_0$ der von $\{(U + z) \cap X : U \in \mathcal{U}_0(X)\}$ erzeugte Cauchyfilter in X . Offensichtlich ist $\{q(F) \cap G : F \in \mathfrak{F}, G \in \mathcal{O}_0\}$ Basis eines Cauchyfilters $\mathcal{O}$ und es gilt $q(\mathcal{O}) \supset \mathfrak{F}$. Man erhält sogar $q(\mathcal{O}) = \mathfrak{F}$.

□

0.13 Lemma

Sei (X, t) eine vollständige komTG und N eine Untergruppe von X .

Sei f eine Gruppentopologie auf X mit $f \subset t$ und $f|_N = t|_N$.

Es sei $(X, f) \sim / N$ vollständig.

Dann ist auch $(X, t)/N$ vollständig.

Beweis:

Sei $\mathfrak{A}$ ein Cauchyfilter in $(X, \tau)/N$. Nach Voraussetzung und nach 0.12 existiert ein τ -Cauchyfilter $\mathfrak{B}$ in X mit $q(\mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}$. $q: X \rightarrow X/N$ sei dabei die Quotientenabbildung. Nach 0.11 ist $t = \{ \vee q^{-1} q(t) \}$. Somit ist $\mathfrak{B}$ sogar ein t -Cauchyfilter. $\mathfrak{B}$ besitzt daher einen Limes x in (X, τ) . Damit ist $q(x)$ Berührungspunkt von $\mathfrak{A}$, also Limes von $\mathfrak{A}$. $\square$

Aus 0.13 folgt, daß halbmetrisierbare komTG gute Nenner sind:

Sei X eine vollständige komTG und N eine Untergruppe von X , so daß N halbmetrisierbar ist. Man wähle dann auf X eine gröbere Gruppentopologie, die halbmetrisierbar ist und die auf N mit der Ausgangstopologie übereinstimmt. Aus der bekannten Aussage, daß halbmetrisierbare vollständige komTG erblich vollständig sind und aus 0.13 folgt die Behauptung.

0.14 Lemma

Seien X und Y vollständige komTG und sei N eine Untergruppe von $X \times Y$. Sei $\text{pr}_Y: X \times Y \rightarrow Y$ die kanonische Projektion. Die Relativtopologie auf N stimme mit der Initialtopologie zu $\text{pr}_Y|_N: N \rightarrow Y$ überein. Dann gilt:

$$Y / \text{pr}_Y(N) \text{ vollständig} \Rightarrow (X \times Y) / N \text{ vollständig.}$$

Beweis:

Sei t die Produkttopologie auf $X \times Y$ und sei f die Initialtopologie auf $X \times Y$ zu pr_Y . Mit $K := X \setminus \{0\}$ gilt $K = \overline{\{0\}}^f$. Also folgt die Vollständigkeit von $(X \times Y, f)/N$ aus der Vollständigkeit von $(X \times Y, t)/(N \cap K) \cong Y / \text{pr}_Y(N)$. Nach Voraussetzung ist $f|_N = t|_N$. Es ist $f \subset t$. f ist vollständig (da Y vollständig ist). Damit liefert 0.13 die Behauptung. $\square$

Lemma 0.14 ergibt folgenden "Blickwinkel":

Sei N eine komTG und seien X_i vollständige komTG ($i \in I$) mit $N \subset \prod_{i \in I} X_i$.

Es existiere $K \subset I$, so daß N die Initialtopologie zu $\text{pr}_{K|N}: N \rightarrow \prod_{i \in K} X_i$ trägt.

Dabei sei $\text{pr}_K: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in K} X_i$ die kanonische Projektion. Dann gilt:

$$\prod_{i \in K} X_i / \text{pr}_K(N) \text{ vollständig} \Rightarrow \prod_{i \in I} X_i / N \text{ vollständig.}$$

Sind alle X_i ($i \in K$) metrisierbar (oder allgemeiner gute Nenner), so genügt es (im Sinn von 0.4 bzw. 0.5), den Quotienten des Teilprodukts auf Vollständigkeit zu untersuchen. Sind sogar alle X_i ($i \in I$) gute Nenner, so ist die Vollständigkeit der beiden Quotienten sogar äquivalent.

Lemma 0.14 ist bereits der halbe Weg zu Satz 0.5 (3) (und 0.4). Das folgende Lemma liefert den vollen Beweis zu 0.5 (3), hierbei hält sich die Beweisidee an Wigner [12, Th 4.1].

0.15 Lemma

Selen X und Y vollständige komTG, sei N eine komTG und selen $j_X : N \hookrightarrow X$ und $j_Y : N \hookrightarrow Y$ Einbettungen. Sei Y ein guter Nenner und sei $Y/j_Y(N)$ vollständig. Dann ist $X/j_X(N)$ vollständig.

Beweis:

Wir betrachten $\Delta: N \hookrightarrow X \times Y$, $z \mapsto (j_X(z), j_Y(z))$. Selen weiter $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$ und $\text{pr}_Y: X \times Y \rightarrow Y$ die kanonischen Projektionen und $q_X: X \rightarrow X/j_X(N)$, $q_Y: Y \rightarrow Y/j_Y(N)$ sowie $q_\Delta: X \times Y \rightarrow (X \times Y)/\Delta N$ die Quotientenabbildungen. Wegen $\text{pr}_{Y|\Delta N}: \Delta N \xrightarrow{\cong} j_Y(N)$ und 0.14 ist $(X \times Y)/\Delta N$ vollständig.

Wir betrachten nun $k: X \times Y \rightarrow X/j_X(N)$, $k := q_X \circ \text{pr}_X$. k ist Quotientenabbildung und es ist $\text{Kern } k \supset \Delta N$. Also ist

$$\hat{k}: (X \times Y)/\Delta N \rightarrow X/j_X(N), z + \Delta N \mapsto k(z)$$

eine wohldefinierte Quotientenabbildung.

Wir zeigen: $\text{Kern } \hat{k} \cong Y$. Damit folgt die Behauptung, da Y ein guter Nenner ist.

Die Abbildung $f: Y \rightarrow (X \times Y)/\Delta N$, $y \mapsto (0, y) + \Delta N$ ist offensichtlich injektiv und stetig. Es ist $f(Y) \subset \text{Kern } \hat{k}$. Sei $(x, y) + \Delta N \in \text{Kern } \hat{k}$. Dann existiert $x' \in N$ mit $x = j_X(x')$, also ist

$$(x, y) + \Delta N = (0, y - j_Y(x')) + \Delta N = f(y - j_Y(x')).$$

Damit ist $f(Y) = \text{Kern } \hat{k}$.

Wir zeigen, daß f offen in $\text{Kern } \hat{k}$ ist:

Sei $U \in \mathcal{U}_0(Y)$. Dann existiert $V \in \mathcal{U}_0(X)$ mit $j_Y^{-1}(U) = j_X^{-1}(V)$.

Behauptung: $f(U - U) \supset ((V \times U) + \Delta N) \cap \text{Kern } \hat{k}$.

Sei dazu $x \in V$, $y \in U$ mit $(x, y) + \Delta N \in \text{Kern } \hat{k}$. Wie oben wählen wir

$x' \in N$ mit $j_X(x') = x$. Somit ist $(x, y) + \Delta N = f(y - j_Y(x'))$ und

$$y - j_Y(x') \in U - j_Y(j_X^{-1}(V)) \subset U - U. \quad \square$$

Das folgende Lemma erlaubt, daß man sich bei projektiven Systemen auf konfinale Teilsysteme zurückzieht.

0.16 Lemma

Sei I eine gerichtete Indexmenge, $((X_\alpha)_{\alpha \in I}, (f_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in I, \alpha \leq \beta})$ ein projektives System vollständiger separierter komTG und $X := \varprojlim_{\alpha \in I} X_\alpha$ der projektive Limes.

Sei $K \subset I$ konfinal in I .

Dann ist $X \cong \varprojlim_{\alpha \in K} X_\alpha$ kanonisch und es gilt:

$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha / \Delta_I X$ vollständig $\Leftrightarrow \prod_{\alpha \in K} X_\alpha / \Delta_K X$ vollständig.

(Hierbei seien $\Delta_I: X \hookrightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ und $\Delta_K: X \hookrightarrow \prod_{\alpha \in K} X_\alpha$ die kanonischen Einbettungen).

Beweis:

Offensichtlich induziert die kanonische Projektion $\text{pr}_K: \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in K} X_\alpha$ einen kanonischen Isomorphismus $\varprojlim_{\alpha \in I} X_\alpha \xrightarrow{\cong} \varprojlim_{\alpha \in K} X_\alpha$. Nach 0.14 (und der Bemerkung danach) folgt die Richtung " $\Leftarrow$ ".

Sei nun $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha / \Delta_I X$ vollständig. Sei $f_{\alpha\alpha} := \text{id}: X_\alpha \rightarrow X_\alpha$ ($\alpha \in I$).

Wähle für $\alpha \in I$ $v(\alpha) \in K$ mit $v(\alpha) \geq \alpha$ und $v(\alpha) = \alpha$, falls $\alpha \in K$.

Setze $F: \prod_{\alpha \in K} X_\alpha \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, $(x_\alpha)_{\alpha \in K} \mapsto (f_{\alpha, v(\alpha)}(x_{v(\alpha)}))_{\alpha \in I}$.

Offensichtlich ist F stetig, $\text{pr}_K \circ F = \text{id}$ und $F|_{\Delta_K X}: \Delta_K X \xrightarrow{\cong} \Delta_I X$.

F und pr_K induzieren stetige Abbildungen

$$\begin{aligned} \hat{F}: \prod_{\alpha \in K} X_\alpha / \Delta_K X &\longrightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha / \Delta_I X \text{ und} \\ \widehat{\text{pr}}: \prod_{\alpha \in I} X_\alpha / \Delta_I X &\longrightarrow \prod_{\alpha \in K} X_\alpha / \Delta_K X. \end{aligned}$$

Es ist $\widehat{\text{pr}} \circ \hat{F} = \text{id}$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

0.17 Lemma

Sei I eine Indexmenge, 0.1. Sei für $\alpha \in I$ X_α eine vollständige komTG und sei $f_\alpha: X_0 \rightarrow X_\alpha$ stetig mit $f_0 = \text{id}$. Sei $N := (f_\alpha)_{\alpha \in I} (X_0)$.

Dann ist $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha / N$ vollständig.

Beweis:

Man wende 0.14 auf $(\prod_{\alpha \in I \setminus \{0\}} X_\alpha) \times X_0$ an. $\square$

Fast metrisierbare kommutative Topologische Gruppen

B. A. Pasyukov führte in [8] den Begriff "fast metrisierbar" ("almost metrizable") ein. Geiler und Kenderov [4] zeigten, daß fast metrisierbare komTG gute Nenner sind. (Genauer wird sogar eine allgemeinere Aussage für nicht notwendig kommutative topologische Gruppen gezeigt).

0.18 Definition

Eine komTG X heißt "fast metrisierbar" ("almost metrizable"), falls eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ existiert, die eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Man sieht leicht, daß lokalkompakte kommutative topologische Gruppen fast metrisierbar sind.

0.19 Lemma

Sei X eine komTG. Dann ist X genau dann fast metrisierbar, wenn eine abgeschlossene kompakte Untergruppe $K \subset X$ existiert, so daß X/K metrisierbar ist.

Beweis:

Siehe [9, Remark 13.19 (c)].

Wir vollziehen nun den Beweis von Geiler und Kenderov [4] nach. Dabei vereinfacht sich der Beweis aufgrund der in diesem Abschnitt bereits gebrachten Überlegungen auf folgendes Lemma:

0.20 Lemma

Sei K eine kompakte komTG. Dann ist K ein guter Nenner.

Beweis:

Sei X eine vollständige komTG mit $K \subset X$. Sei $q: X \rightarrow X/K$ die Quotientenabbildung. Sei $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter in X/K . Wir wählen einen Ultrafilter $\mathfrak{G}$ in X mit $q(\mathfrak{G}) \supset \mathfrak{F}$. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{G}$ bereits Cauchyfilter ist. Sei dazu $U \in \mathcal{U}_0(X)$. Dann existiert ein $F \in \mathfrak{F}$ mit $q^{-1}(F) - q^{-1}(F) \subset U + K$. Sei $x \in q^{-1}(F)$, dann ist $q^{-1}(F) \subset U + x + K$. Da K präkompakt ist, existieren $n \in \omega$ und $b_1, \dots, b_n \in X$, so daß $q^{-1}(F) \subset \bigcup_{i=1, \dots, n} (b_i + U + U)$ gilt. $\mathfrak{G}$ ist ein feinerer Ultrafilter, also existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ und ein $G \in \mathfrak{G}$, $G \subset q^{-1}(F)$ mit $G \subset b_k + U + U$. Damit ist $\mathfrak{G}$ ein Cauchyfilter in X .

0.21 Folgerung

Jede fast metrisierbare komTG ist ein guter Nenner.

Beweis:

Die Behauptung folgt aus 0.19, 0.6, 0.20 und 0.3.□

In Hinblick auf spätere Verwendung benötigen wir noch die folgenden Aussagen:

0.22 Lemma

Sei X eine kommutative Gruppe und $(t_n)_{n \in \omega}$ eine Folge von fast metrisierbaren Gruppentopologien auf X . Dann ist die vollständige Hülle von $(X, \bigvee_{n \in \omega} t_n)$ fast metrisierbar.

Beweis:

Wir verwenden den Begriff "inframetrisierbar". für eine Definition siehe [7, 11.13]. Nach [7, 13.20] ist (X, t_n) inframetrisierbar für jedes $n \in \omega$. Die Bemerkung nach [9, 11.13] zeigt, daß dann auch $(X, \bigvee_{n \in \omega} t_n)$ inframetrisierbar ist und somit (mittels der gleichen Bemerkung) auch die zugehörige vollständige Hülle. Diese ist damit sogar fast metrisierbar, siehe hierzu [7, 13.20 Remark (a)].□

0.23 Lemma

Sei (X, t) eine fast metrisierbare vollständige komTG. Dann existiert eine Familie $\mathcal{M}$ von halbmetrisierbaren Gruppentopologien auf X , so daß $t = \bigvee_{f \in \mathcal{M}} f$ gilt, und so daß für alle $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ $(X, \bigvee_{f \in \mathcal{N}} f)$ vollständig ist.

Beweis:

Sei K gemäß 0.19 eine abgeschlossene kompakte Untergruppe von X , so daß X/K metrisierbar ist. Sei t_0 die zur Quotientenabbildung $q: X \rightarrow X/K$ initiale Topologie auf X . Sei $\mathcal{M}$ eine Familie von halbmetrisierbaren Gruppentopologien auf X , die die Topologie t erzeugt, und so daß für jedes $f \in \mathcal{M}$ gilt $f \supseteq t_0$.

Es genügt zu zeigen, daß jede Gruppentopologie f auf X mit $t_0 \subseteq f \subseteq t$ vollständig ist.

Sei hierzu N der Abschluss der Null bezüglich $\mathfrak{f}$. N ist abgeschlossen bezüglich $\mathfrak{l}$ und es ist $N \subset K$, also ist N $\mathfrak{l}$ -kompakt.

Wir betrachten $Y := X/N$ und die Quotientenabbildung $q_N: X \rightarrow X/N$. Selen $\hat{\mathfrak{l}}$, $\hat{\mathfrak{l}}_0$ und $\hat{\mathfrak{f}}$ die Quotiententopologien zu $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}_0$ und $\mathfrak{f}$ auf Y .

Zu zeigen ist die Vollständigkeit von $(Y, \hat{\mathfrak{f}})$. Nach 0.20 ist $(Y, \hat{\mathfrak{l}})$ vollständig, also genügt es zu zeigen, daß $\hat{\mathfrak{l}} = \hat{\mathfrak{f}}$ ist. Nun ist $\hat{\mathfrak{f}} \subset \hat{\mathfrak{l}}$, $\hat{\mathfrak{f}}$ ist separiert und es ist $q_N(K)$ $\hat{\mathfrak{l}}$ -kompakt, also gilt $\hat{\mathfrak{f}}|_{q_N(K)} = \hat{\mathfrak{l}}|_{q_N(K)}$.

Weiter gilt $\hat{\mathfrak{l}}_0/q_N(K) \subset \hat{\mathfrak{f}}/q_N(K) \subset \hat{\mathfrak{l}}/q_N(K) \stackrel{!}{=} \hat{\mathfrak{l}}_0/q_N(K)$.

Also liefert 0.11 $\hat{\mathfrak{f}} = \hat{\mathfrak{l}}$, also die Behauptung. $\square$

1 Vollständigkeitskriterien bei Anwesenheit einer geeigneten Hilfstopologie

In diesem Abschnitt werden wir eine Methode entwickeln, die uns unter gewissen Voraussetzungen notwendige und hinreichende Bedingungen dafür liefert, ob ein guter Nenner vorliegt (siehe 1.6, 1.9 und 1.10). Diese Methode werden wir in den Abschnitten 2 und 3 auf konkrete Fälle anwenden. Gemäß 0.4 (und 0.5) betten wir den zu untersuchenden Nenner in ein geeignetes Produkt guter Nenner ein. Wir fordern als wesentliche Voraussetzung die Anwesenheit einer gröberen Topologie ("Hilfstopologie"), die "nicht zu weit" von der untersuchten Topologie "entfernt" ist. Dadurch sind wir in der Lage, ein spezielles Modell der vollständigen Hülle des untersuchten Quotienten anzugeben (siehe 1.9 und 1.10).

Den Abschluss dieses Abschnitts bildet eine einfache Anwendung der entwickelten Methode (siehe 1.11 und die Beispiele in 1.12).

Wir betrachten im Folgenden die Situation:

1.1 Situation

Sei (X, t) eine vollständige separierte komTG.

Sei I eine Indexmenge.

Sei für $\alpha \in I$ ($\alpha \neq 0$) t_α eine separierte Gruppentopologie auf X und (X_α, t_α) die vollständige Hülle zu (X, t_α) .

(Wir bezeichnen die Topologie auf X_α wieder mit t_α !)

Es gelte:

- (1) $t = \bigvee_{\alpha \in I} t_\alpha$.
- (2) $t_0 \subset t_\alpha$ ($\alpha \in I$).
- (3) die kanonische Abbildung $j_\alpha: X_\alpha \rightarrow X_0$ ist injektiv ($\alpha \in I$).

Wenn nicht anders genannt, ist X immer mit der Topologie t versehen.

Im Sinn der obigen Vorbemerkung ist t_0 die erwähnte Hilfstopologie.

Die folgenden Schreibweisen wenden wir in der Situation 1.1 stillschweigend an:

1.2 Bemerkung - Schreibweisen

Es gelte Situation 1.1.

Gemäß 1.1 (3) identifizieren wir X_l mit einem Teilraum von X_0 .

Ebenso sei X (algebraisch) in X_0 eingebettet, also $X \subset X_l \subset X_0$.

Für $J \subset I$ setzen wir:

$$X_{\sim}^J := \prod_{i \in J} X_l, \quad \text{pr}_J: X_l^I \rightarrow X_{\sim}^J \text{ die kanonische Projektion;}$$

$$\Delta^J: X \rightarrow X_{\sim}^J, \quad x \rightarrow (x)_{i \in J};$$

$$N_J := \overline{\Delta^J X}, \quad q_J: X_{\sim}^J \rightarrow X_{\sim}^J/N_J \text{ die Quotientenabbildung.}$$

Sowie:

$$X_0^J := \prod_{i \in J} X_0, \quad \text{pr}_{0J}: X_0^I \rightarrow X_0^J \text{ die kanonische Projektion;}$$

$$\Delta_0^J: X_0 \rightarrow X_0^J, \quad x \rightarrow (x)_{i \in J};$$

$$N_{0J} := \overline{\Delta_0^J X_0} = \Delta_0^J X_0, \quad q_{0J}: X_0^J \rightarrow X_0^J/N_{0J} \text{ die Quotientenabbildung.}$$

Sowie:

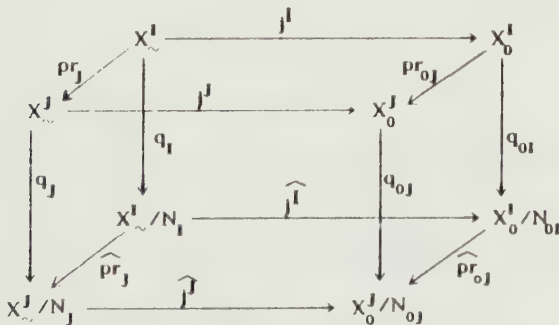
$$j^J: X_{\sim}^J \rightarrow X_0^J \text{ die von } j_l := \text{id}: X_l \rightarrow X_0 \text{ induzierte Abbildung.}$$

Alle definierten Abbildungen sind stetig und für beliebiges $J \subset I$ ist X_0^J/N_{0J} vollständig. Weiter ist $X \xrightarrow[\Delta^I]{\cong} N_I$, untersucht wird $X_{\sim}^I/N_I$ auf Vollständigkeit.

Wir erhalten für $J \subset I$ das folgende kommutierende Diagramm, wobei die induzierten Abbildungen

$$\widehat{\text{pr}}_J: X_{\sim}^I/N_I \rightarrow X_{\sim}^J/N_J, \quad \widehat{\text{pr}}_{0J}: X_0^I/N_{0I} \rightarrow X_0^J/N_{0J},$$

$$\widehat{j}^J: X_{\sim}^J/N_J \rightarrow X_0^J/N_{0J} \text{ wohldefiniert und stetig sind.}$$



1.3 Beispiel

- (1) Wir betrachten $X := \mathbb{K}^{(\omega)}$ mit der feinsten lokalkonvexen Topologie. Für $\lambda \in \omega_+^{(0)}$ (mit $\omega_+ := \omega \setminus \{0\}$) sei t_λ die von der Box $\{x \in X : |x_n| < \frac{1}{\lambda_n}\}$ erzeugte Normtopologie. t_0 sei die Spur der Produkttopologie. Setzt man $1 := \omega_+^{(0)}$, so ist die Situation 1.1 erfüllt.
- (2) Analog verfährt man für $X := \mathbb{K}^{(0)}$ versehen mit der Boxtopologie. Hier gilt sogar $X = X_\lambda = X_0$ für alle $\lambda \in \omega_+^{(0)}$.

1.4 Definition

Es gelte Situation 1.1. Dann setzen wir

$$H := q_{0I} \left(\left(\lim_j \right)^I(\mathfrak{F}) : \mathfrak{F} \text{ ist Cauchyfilter in } X_\infty^I / N_I \right),$$

$$H_e := \{ x \in X_0^I : \forall_{J \subset I \text{ endlich}} \text{pr}_{0J}^{-1}(x) \in X_\infty^J + N_{0J} \}$$

1.5 Bemerkung

H ist wohldefiniert und es gilt

$$X_\infty^I + N_{0I} \subset H \subset X_0^I \text{ und ebenso } X_\infty^I + N_{0I} \subset H_e \subset X_0^I.$$

H und H_e sind Untergruppen von X_0^I .

Die Abbildung $\widehat{j^I} : X_\infty^I / N_I \rightarrow H / N_{0I}$ (eingeschränktes Ziel) besitzt eine surjektive Fortsetzung

$$\widetilde{j^I} : (X_\infty^I / N_I)^\sim \rightarrow H / N_{0I}$$

auf die separierte vollständige Hülle von X_∞^I / N_I .

1.6 Lemma

Es gelte Situation 1.1. Dann gilt:

$$X_\infty^I / N_I \text{ vollständig} \Leftrightarrow H = X_\infty^I + N_{0I} \\ \left(\text{d.h. } \forall_{x \in H} \exists_{t \in X_0^I} x = \bigwedge_0^I(t) \in X_\infty^I \right)$$

Beweis:

Sei $x \in H$, $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter in X_∞^I / N_I mit $q_{0I}(x) = \lim \widehat{j^I}(\mathfrak{F})$. Nach Voraussetzung existiert $y \in X_\infty^I$ mit $q_I(y) = \lim \mathfrak{F}$. Also ist (wegen X_0^I / N_{0I} separiert) $q_{0I}(x) = q_{0I}(j^I(y)) = q_{0I}(y)$, d.h. $x = y \in N_{0I}$.

Wir benötigen noch die zusätzlichen Voraussetzungen:

1.7 Definition

Es gelte Situation 1.1. Dann sei

$$(Vor1) \Leftrightarrow \forall_{J \subset I \text{ endlich}} \exists_{J' \subset I \text{ endlich}} X_\infty^{J'} \cap N_{0J'} = N_{J'}.$$

$$(Vor2) \Leftrightarrow \forall_{J \subset I \text{ endlich}} \exists_{J' \subset I} X_\infty^{J'} / N_{J'} \text{ vollständig.}$$

Bemerkung:

(1) Offensichtlich gilt für festes $J \in I$:

$$\begin{aligned} X_{\sim}^J \cap N_J &= N_J \Leftrightarrow \bigvee_{x \in \bigcap_{J \in I} X_J} \Delta_0^J(x) \in N_J = \overline{\Delta_J(X)} \\ &\Leftrightarrow \widehat{J}^J \text{ ist injektiv.} \end{aligned}$$

Denn: Sei $x \in X_{\sim}^J$, dann ist

$$x \in N_{0J} \Leftrightarrow \widehat{J}^J(q_J(x)) = q_{0J}(J^J(x)) = q_{0J}(x) = 0$$

und

$$x \in N_J \Leftrightarrow q_J(x) = 0.$$

(2) (Vor1) in 1.7 impliziert die Injektivität von $\widehat{J}^I$. Denn:
 $X_{\sim}^I/N_I$ ist separiert und trägt die Initialtopologie zu

$$\widehat{pr}_J : X_{\sim}^I/N_I \rightarrow X_{\sim}^J/N_J \quad (J \in I \text{ endlich}).$$

Denn es ist $N_J = \overline{pr_J(N_I)}$ und es gilt allgemein:

Sei K eine gerichtete Indexmenge und seien Z und Z_{α} ($\alpha \in K$) komTG. Z trage die Initialtopologie zu $f_{\alpha} : Z \rightarrow Z_{\alpha}$ ($\alpha \in K$). Für $\alpha, \beta \in K$, $\alpha < \beta$ sei die Initialtopologie zu f_{β} feiner als die zu f_{α} . Sei N eine Untergruppe von Z .

Dann trägt Z/N die Initialtopologie zu

$$\widehat{f}_{\alpha} : Z/N \rightarrow Z_{\alpha}/f_{\alpha}(N), \quad x+N \mapsto f_{\alpha}(x)+f_{\alpha}(N) \quad (\alpha \in K)$$

$$\text{und damit auch zu } Z/N \rightarrow Z_{\alpha}/\overline{f_{\alpha}(N)}, \quad x+N \mapsto f_{\alpha}(x)+\overline{f_{\alpha}(N)} \quad (\alpha \in K)$$

Denn:

Sei $U \in \mathcal{U}_0(Z)$, dann existiert $\alpha \in K$ und $V \in \mathcal{U}_0(Z_{\alpha})$ mit $U \supset f_{\alpha}^{-1}(V)$ (da K gerichtet ist). Also folgt $U+N \supset f_{\alpha}^{-1}(V)+N \supset f_{\alpha}^{-1}(V+f_{\alpha}(N))$.

Das Diagramm in 1.2 liefert damit die Injektivität von $\widehat{J}^I$:

Sei $0 \neq x \in X_{\sim}^I/N_I$, dann existiert nach dem soeben gezeigten ein $J \in I$ endlich mit $\widehat{pr}_J(x) \neq 0$, also folgt (mit J' zu J gem. (Vor1))

$$0 \neq \widehat{J}^{J'} \circ \widehat{pr}_{J'}(x) = \widehat{pr}_{0J'} \circ \widehat{J}^{J'}(x) \quad (\text{da } \widehat{J}^{J'} \text{ injektiv ist, siehe 1.8 (II)}).$$

Damit ist $\widehat{J}^I(x) \neq 0$, d.h. $\widehat{J}^I$ ist injektiv.

(3) (Vor1) in 1.7 gilt trivialerweise, falls für alle $\alpha \in I$ $X_{\alpha} = X$ ist, d.h. falls für alle $\alpha \in I$ eine vollständige Topologie auf X ist. Man beachte hierzu 1.8 (II).

(4) (Vor2) in 1.7 ist erfüllt, falls für alle $J \in I$ endlich $(X, \bigvee_{\alpha \in J} t_{\alpha})$ ein guter Nenner ist, insbesondere also, falls für alle $\alpha \in I$ t_{α} fast metrisierbar ist (vergleiche 0.22).

- (5) (Vor1) und (Vor2) in 1.7 sind erfüllt, falls das System $(U_i)_{i \in I}$ bezüglich der Inklusion gerichtet ist.

Denn:

(Vor1) folgt dann aus $\bigcap_{i \in J} X_i = X_{\max J}$ und 1.8 (i), dabei sei $J \neq \emptyset$ endlich und $\max J \in J$.

(Vor2) folgt analog mittels 0.14.

1.9 Lemma

Es gelte Situation 1.1 und (Vor1) und (Vor2) aus 1.7.

Dann ist die kanonische Fortsetzung von $\hat{j}^\sim$ zu

$$\hat{j}^\sim: (X_\sim^I/N_I) \rightarrow H/N_{0I}$$

(vergleiche 1.5) ein algebraischer Isomorphismus.

Insbesondere gilt in diesem Fall:

$$X_\sim^I/N_I \text{ ist vollständig} \Leftrightarrow H = X_\sim^I + N_{0I}.$$

Beweis:

Nach 1.5 ist $\hat{j}^\sim$ wohldefiniert und surjektiv, zu zeigen ist die Injektivität. Sei dazu $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter in $X_\sim^I/N_I$ mit $\lim \hat{j}^\sim(\mathfrak{F}) = 0$. Sei $J \neq \emptyset$ endlich. Wähle $J \neq \emptyset$ endlich gemäß 1.7 (Vor1) zu J und $J \neq \emptyset$ gemäß 1.7 (Vor2) zu J . $\widehat{\text{pr}}_{J^\sim}(\mathfrak{F})$ ist konvergent, also auch $\widehat{\text{pr}}_J(\mathfrak{F})$. Nach Wahl von J ist damit $\lim \widehat{\text{pr}}_J(\mathfrak{F}) = 0$ (vergleiche 1.8 (i)). Damit konvergiert auch $\widehat{\text{pr}}_J(\mathfrak{F})$ gegen 0.

$X_\sim^I/N_I$ trägt die Initialtopologie zu $\widehat{\text{pr}}_J: X_\sim^I/N_I \rightarrow X_\sim^I/N_J$ ($J \neq \emptyset$ endlich), also konvergiert $\mathfrak{F}$ gegen 0.

Der Zusatz "Insbesondere ..." ist damit klar, für die Richtung " $\Rightarrow$ " vergleiche man 1.6. $\square$

Das Kriterium aus 1.9 ist noch sehr unhandlich, da H von der Menge der Cauchyfilter in $X_\sim^I/N_I$ explizit abhängt. Diese Anhängigkeit ist für die Menge H_e (vergleiche 1.4) offensichtlich nicht mehr vorhanden. Das folgende Kriterium ist (bei vorgegebenen Räumen X_i ($i \in I$)) rein algebraischer Natur.

1.10 Lemma

Es gelte Situation 1.1. Dann gilt:

- (1) Ist (Vor1) in 1.7 erfüllt, so ist

$$X_\sim^I + N_{0I} \subset H_e \subset H \subset X_0^I.$$

Insbesondere gilt dann

$$X_\sim^I/N_I \text{ vollständig} \Leftrightarrow H_e = X_\sim^I + N_{0I}.$$

- (2) Ist (Vor2) in 1.7 erfüllt, so ist

$$X_\sim^I + N_{0I} \subset H \subset H_e \subset X_0^I.$$

- (3) Sind (Vor1) und (Vor2) in 1.7 erfüllt, so gilt insbesondere

$$X_\sim^I/N_I \text{ vollständig} \Leftrightarrow H_e = X_\sim^I + N_{0I}.$$

Beweis:

Zu (1): Sei $x \in H_e$ fest. Sei gemäß (Vor1) M ein gerichtetes konfinales Teilsystem in $\{J \mid I \text{ endlich}\}$, so daß für alle $J \in M$ $X_{\sim}^J \cap N_{0J} = N_J$ gilt.

Zu $J \in M$ wählen wir (nach Definition von H_e) $y \in X_{\sim}^J$ mit $\text{pr}_{0J}(x) = y \in N_{0J}$ und $x_J \in X_{\sim}^J$ mit $\text{pr}_J(x_J) = y$.

Für $J_1, J_2 \in M$, $J_1 \leq J_2$ gilt dann $\text{pr}_{J_1}(x_{J_1}) = \text{pr}_{J_1}(x_{J_2}) \in N_{0J_1} \cap X_{\sim}^{J_1} = N_{J_1}$ (nach (Vor1)).

Somit ist $(q_1(x_J))_{J \in M}$ ein Cauchynetz in $X_{\sim}^I / N_I$ und es ist

$\lim_{J \in M} \widehat{J}^{\uparrow}(q_1(x_J)) = q_{0I}(x)$. Damit ist $x \in H$.

Zu (2): Sei $x \in H$ fest und $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter in $X_{\sim}^I / N_I$ mit

$\lim \widehat{J}^{\uparrow}(\mathfrak{F}) = q_{0I}(x)$. Sei $J \in I$ endlich und J' gemäß (Vor2). Dann ist $\widehat{\text{pr}_{J'}}(\mathfrak{F})$ konvergent, also auch $\widehat{\text{pr}_J}(\mathfrak{F})$. Sei $y \in X_{\sim}^J$ mit $q_J(y) = \lim \widehat{\text{pr}_J}(\mathfrak{F})$. Offensichtlich ist dann $y = \text{pr}_{0J}(x) \in N_{0J}$ und somit ist $x \in H_e$.

Zu (3): Folgt aus (1), (2) und 1.9.

Abschließend bringen wir eine einfache Anwendung zu 1.10:

1.11 Satz

Sei X eine kommutative Gruppe, I eine Indexmenge.

Sei für $\alpha \in I$ t_α eine **vollständige separierte** Gruppentopologie auf X und t_0 eine **separierte** Gruppentopologie auf X mit $t_0 \leq t_\alpha$ ($\alpha \in I$). Es gelte:

$\forall_{\alpha \in I} t_\alpha$ ist metrisierbar (oder fast metrisierbar),
oder

$\forall_{J \in I \text{ endlich}} (X, \bigvee_{\alpha \in J} t_\alpha)$ ist guter Nenner
oder

$\forall_{\alpha \in I} (X, t_\alpha)$ ist guter Nenner und $(t_\alpha)_{\alpha \in I}$ ist (bezüglich der Inklusion) gerichtet.

Dann ist $(X, \bigvee_{\alpha \in I} t_\alpha)$ ein guter Nenner.

Beweis:

Es gilt Situation 1.1 mit $X = X_{\sim}^I$ ($\alpha \in I$), damit ist nach 1.8 (3) (Vor1) in 1.7 erfüllt. (Vor2) in 1.7 gilt nach 1.8 (4) (beachte im Fall fast metrisierbar 0.22) bzw. 1.8 (5). Es gilt $H_e = X_{\sim}^I + N_{0I}$, denn:

Sei $x \in H_e$, d.h. es ist $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X_{\sim}^I$ mit
 $\forall_{J \in I \text{ endlich}} \exists t \in X_0 \forall_{\alpha \in J} x_\alpha - t \in X_{\sim}^I = X$.

Also folgt für $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ $x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in X$. Sei also $t_0 \in I$ beliebig, dann ist $x = \Delta_0^I(x_{t_0}) \in X_{\sim}^I$.

Nach 1.10 (3) ist $X_{\sim}^I / N_I$ vollständig. Wegen $X \cong N_I$ (siehe 1.2) ist nach 0.5 X ein guter Nenner.

1.12 Beispiele

- (1) $\mathbb{K}^{(I)}$, versehen mit der Boxtopologie, ist ein guter Nenner.
- (2) Sei I eine beliebige Indexmenge und M eine Überdeckung von I . Sei für $J \in M$ $p_J: \mathbb{K}^I \rightarrow \mathbb{K}^J$ die kanonische Projektion. Versieht man $\mathbb{K}^J$ ($J \in M$) mit der diskreten Topologie, so ist die Initialtopologie t auf $\mathbb{K}^I$ eine vollständige separierte Lineartopologie (vergleiche [5, §10]). Es ist $(\mathbb{K}^I, t)$ ein guter Nenner. Hierzu sei t_0 die Produkttopologie auf $\mathbb{K}^I$ ($\mathbb{K}$ versehen mit der diskreten Topologie) und t_J ($J \in M$) das Supremum zu t_0 und zu der Initialtopologie zu p_J . Damit ist der 2. Fall von 1.11 anwendbar, denn:

Für $J \in M$ ist t_J eine vollständige Topologie auf $X = \mathbb{K}^I$, die feiner ist als t_0 . Für $K \in M$ endlich ist $(X, \bigvee_{J \in K} t_J)$ ein guter Nenner, denn es ist

$$(X, \bigvee_{J \in K} t_J) \cong_{\text{kan}} (\mathbb{K}^{|K|}, t_{\text{diskret}}) \times (\mathbb{K}, t_{\text{diskret}})^{I \setminus |K|}.$$

- (3) Ist I eine wohlgeordnete Indexmenge, so ist $\mathbb{R}^I$ versehen mit der von der lexikographischen Ordnung erzeugten Ordnungstopologie ein guter Nenner. Dieses Beispiel folgt als Spezialfall von 1.12 (2). Dazu sei für $\alpha \in I$ $J_\alpha := \{\alpha \mid \alpha < \iota\}$ und $M := \{J_\alpha : \alpha \in I\}$. Dann trägt $\mathbb{R}^I$ (mit der hier betrachteten Topologie) die in 1.12 (3) geforderte Initialtopologie, denn eine Nullumgebungsbasis bilden die Mengen der Form

$$\{(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \mathbb{R}^I : x_\alpha = 0 \text{ für alle } \alpha < \iota\}$$

wobei $\iota \in I$ durchläuft.

2 ω_1 -Folgenräume

Dieser Abschnitt wendet die in Abschnitt 1 entwickelte Methode auf geeignete Teilräume von $\mathbb{K}^{\omega_1}$ an. Hierbei reduziert 1.10 die Untersuchungen auf das Herstellen der geforderten Situation und auf die Frage, ob " $X_\infty^1 + N_{01} = H_e$ " gilt.

Diese Frage führt zu kombinatorischen Problemen aus der Mengenlehre. Dabei werden wir auf einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum stoßen, der unter CH ein schlechter Nenner, unter $MA + \neg CH$ ein guter Nenner ist. Weiter werden wir einen Banachraum konstruieren, der unter CH eine gröbere separierte vollständige lokalkonvexe Topologie besitzt, bezüglich der er ein schlechter Nenner ist.

Zuerst ergänzen wir die mengentheoretischen Definitionen aus Abschnitt 0:

2.1 Definition (vergleiche [2, §5])

- (1) Ein *Letersystem* ist eine Familie $(\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ von streng monotonen Abbildungen $\eta_\alpha : \omega \rightarrow \alpha$ mit $\sup \eta_\alpha [\omega] = \alpha$ ($\alpha \in \Omega_1$).

Abweichend von [2] fordern wir zusätzlich $\bigcup_{\alpha \in \Omega_1} \eta_\alpha [\omega] = \omega_1$.

(Zur Erinnerung: $\Omega_1 := \omega_1 \cap \text{LIM}$).

- (2) Sei $(\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ ein Letersystem, $\emptyset \neq A$ eine beliebige Menge (in der Regel eine Kardinalzahl). Dann ist eine *A-Bemalung* von $(\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ eine Familie $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ von Abbildungen $f_\alpha : \omega \rightarrow A$ ($\alpha \in \Omega_1$).

- (3) Sei $((\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}, (f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1})$ ein Letersystem mit A-Bemalung.

Dann heißt eine Abbildung $g : \omega_1 \rightarrow A$ *Uniformisierung*, wenn gilt:

$$\forall \alpha \in \Omega_1 \quad \exists n < \omega \quad \forall m \geq n \quad \forall \alpha \quad f_\alpha(m) = g((\eta_\alpha(m))).$$

(g gibt die Bemalung jeder Leiter, jeweils bis auf endlich viele Stellen, simultan wieder).

Man kann zeigen, daß für $|A| > \omega_1$ (in ZFC) A-Bemalungen ohne Uniformisierung existieren.

Denn sei $f_\alpha(n) := \alpha$ ($\alpha \in \Omega_1$, $n \in \omega$). Sei $g: \omega_1 \rightarrow \omega_1$. Wir zeigen, daß g keine Uniformisierung sein kann.

Sei dazu $h: \omega_1 \rightarrow \omega_1$, $\alpha \mapsto \sup\{g(\beta): \beta < \alpha\}$. Nach 0.10 (1) existiert ein $\alpha \in \Omega_1$ mit $\forall \beta < \alpha \quad h(\beta) < \alpha$. (Beachte dazu, daß Ω_1 Club ist und daß nach 0.10a " $\text{Club} \cap \text{Club} = \text{Club}$ " gilt). Also ist $\forall \beta < \alpha \quad g(\beta) < \alpha$. Also ist auch $\forall n \in \omega \quad f_\alpha(n) = \alpha > g(\eta_\alpha(n))$. $\square$

Weiter ist für endliches A, $|A| \geq 2$, die Frage, ob jede A-Bemalung eine Uniformisierung besitzt, äquivalent dazu, ob jede 2-Bemalung eine Uniformisierung besitzt.

Denn sei $k: \omega \rightarrow \omega$ und sei $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ eine k-Bemalung.

Sei für $i < k$ $f^{(i)}(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } f_\alpha(n) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (n \in \omega)$.

Sei $g^{(i)}$ eine Uniformisierung zu $f_\alpha^{(i)}$.

Wir setzen $g(i) := 1$, falls genau ein $i < k$ existiert mit $g^{(i)}(1)=1$, und $g(i)=0$ sonst. g ist Uniformisierung zu f , denn sei $\alpha \in \Omega_1$:

Es existiert $n_0 \in \omega$ mit $\forall n > n_0 \quad \forall i < k \quad f_\alpha^{(i)}(n) = g^{(i)}(\eta_\alpha(n))$.

Damit folgt sofort $\forall n > n_0 \quad f_\alpha(n) = g(\eta_\alpha(n))$. $\square$

Es verbleiben also nur die nicht trivialen Fälle $A=2$ und $A=\omega$. Ob auch diese Fälle äquivalent sind, ist mir nicht bekannt.

Setzt man CH voraus, so besitzt jedes Leittersystem eine 2-Bemalung ohne Uniformisierung. Genauer reichen bereits schwächere Annahmen als CH, z.B. weak $\diamond$ (vergleiche 2.11). Unter $\text{MA} + \neg \text{CH}$ besitzt dagegen jede ω -Bemalung jedes Leittersystems eine Uniformisierung (vergleiche 2.12).

Wir betrachten folgende Situation:

2.2 Situation

Sei Z eine vollständige separierte komTG.

Sei $(\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ ein Leitersystem.

Sei für $\alpha \in \Omega_1$ Y_α eine vollständige separierte komTG, so daß gilt:

$$Z^{(\omega)} \subset Y_\alpha \subset Z^\omega \quad \text{und} \quad t_{Y_\alpha} \supset t_{\text{koor}}.$$

(Hierbei sei t_{Y_α} die Topologie von Y_α , t_{koor} die Spur der Produkttopologie auf Y_α).

Sei $pr_{\eta_\alpha} : Z^\omega \rightarrow Z^\omega$, $(x_i)_{i \in \omega_1} \mapsto (x_{\eta_\alpha(n)})_{n \in \omega}$ die kanonische Projektion ($\alpha \in \Omega_1$).

Sei $X := \bigcap_{\alpha \in \Omega_1} pr_{\eta_\alpha}^{-1}[Y_\alpha]$ versehen mit der Initialtopologie zu

$$pr_{\eta_\alpha|X} : X \rightarrow Y_\alpha.$$

Zusätzlich bezeichne (Vori) die Voraussetzung:

$$(Vori) \quad \bigvee_{\alpha \in \Omega_1} E \subset \omega \text{ endlich} \quad t_{Y_\alpha|Z^E} = t_{\text{koor}|Z^E}.$$

2.3 Bemerkung

Es gelte Situation 2.2 (ohne (Vori)).

- (i) Wir setzen $t_0 := t_{\text{koor}}$, die von der Produkttopologie auf X induzierte Topologie.

Wir setzen $I := \Omega_1$ und für $\alpha \in I$ t_α die von t_0 und von $pr_{\eta_\alpha|X} : X \rightarrow Y_\alpha$ auf X induzierte Topologie.

Offensichtlich sind

$$X_0 := Z^{\omega_1} \quad \text{und} \quad X_\alpha := pr_{\eta_\alpha}^{-1}[Y_\alpha] \quad (\alpha \in I)$$

vollständige separierte Hüllen zu (X, t_0) und zu (X, t_α) (vgl. (2)).

Damit ist die Situation 1.1 erfüllt.

Wir übernehmen die Schreibweisen aus 1.2 sowie die Definitionen aus 1.4 und 1.7.

- (2) Für $J \neq I$ endlich ist X sogar dicht in $\bigcap_{\alpha \in J} X_\alpha$ bezüglich der Spurtopologie zu $\bigvee_{\alpha \in J} t_\alpha$. Denn:

$$\text{Sei } x = (x_t)_{t \in \omega_1} \in \bigcap_{\alpha \in J} X_\alpha = U \cap U_0 \left(\bigvee_{\alpha \in J} t_\alpha \bigcap_{\alpha \in J} X_\alpha \right)$$

Dann existiert $K \subset \omega_1$ endlich mit

$$\{ (z_t)_{t \in \omega_1} : z_t = 0 \text{ für } t \in K \cup \bigcup_{\alpha \in J} \eta_\alpha[\omega] \} \subset U.$$

Set $y_t := x_t$ für $t \in K \cup \bigcup_{\alpha \in J} \eta_\alpha[\omega]$ und $y_t := 0$ sonst ($t \in \omega_1$)

und set $y := (y_t)_{t \in \omega_1}$. Wegen $|\eta_\alpha[\omega] \cap \eta_\beta[\omega]| < \infty$ für $\alpha, \beta \in \Omega_t$, $\alpha \neq \beta$

ist $\forall_{\alpha \in \Omega_t, \alpha \neq J} \text{pr}_{\eta_\alpha}(y) \in Z^{(\omega)} \subset Y_\alpha$, also ist $y \in X$.

Nach Konstruktion von y und Wahl von K ist $x - y \in U_0$.

Weiter ist für $J \neq I$ endlich $\bigcap_{\alpha \in J} X_\alpha$ bezüglich der Spurtopologie zu $\bigvee_{\alpha \in J} t_\alpha$ vollständig, wie man mittels t_0 leicht nachrechnet. Also ist $\bigwedge_{\alpha \in J} \left(\bigcap_{\alpha \in J} X_\alpha \right)$

abgeschlossen in X_∞^J . Insbesondere gilt damit $N_J = \overline{\bigwedge_{\alpha \in J} (X_\alpha)}$.

Mittels 1.8 (1) sieht man, daß 1.7 (Vorl) erfüllt ist.

- (3) Wir betrachten gemäß Definition 1.4

$$H_e := \left\{ x \in (Z^{(\omega)})^I : \bigcap_{J \neq I \text{ endlich}} \text{pr}_{0J}(x) \in X_\infty^J + N_{0J} \right\}.$$

Es gilt $H_e = (Z^{(\omega)})^I = X_\infty^I$, denn:

Sei $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} = ((x_{\alpha,t})_{t \in \omega_1})_{\alpha \in I} \in (Z^{(\omega)})^I$ und sei $J \subset I$ endlich.

Sei $R := \omega_1 \setminus \bigcup_{\alpha \in J} \eta_\alpha[\omega]$, $D := \bigcup_{\substack{\alpha, \beta \in J \\ \alpha \neq \beta}} (\eta_\alpha[\omega] \cap \eta_\beta[\omega])$.

Setze für $\alpha \in J$, $t \in \omega_1$ $y_{\alpha,t} := \begin{cases} x_{\alpha,t} & \text{falls } t \in R \cup D \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Damit definiert man $y := (y_\alpha)_{\alpha \in J} := (y_{\alpha,t})_{\alpha \in J, t \in \omega_1}$.

Beachtet man, daß D endlich ist, so folgt $y \in X_\infty^J$.

Für $t \in \omega_1 \setminus (R \cup D)$ existiert genau ein $\alpha \in J$ mit $t \in \eta_\alpha[\omega]$, man setze

$t_t := x_{\alpha,t}$. Für $t \in R \cup D$ setze man $t_t := 0$.

Damit ist für jedes $\alpha \in J$ $x_\alpha - y_\alpha - t \in X_\alpha$ und $\bigwedge_{\alpha \in J} (t) \in N_{0J}$.

Es folgt $\text{pr}_{0J}(x) = \bigwedge_{\alpha \in J} (t) \in X_\infty^J + N_{0J}$, was zu zeigen war. $\square$

- (4) Insbesondere gilt nach 1.10 (1):

$$X_\infty^I / N_I \text{ vollständig} \Rightarrow (Z^{(\omega)})^I = X_\infty^I + \bigwedge_{\alpha \in I} (Z^{(\omega)}).$$

Es gelte nun zusätzlich 2.2 (Vorl).

- (5) Offensichtlich folgt aus 2.2 (Vorl), daß für $\alpha \in \Omega_1$, E_{ω} endlich Z^E in Y_{α} kanonisch komplementiert ist.
- (6) Somit impliziert 2.2 (Vorl), daß X_{α} ein guter Nenner ist, falls Y_{α} ein guter Nenner ist ($\alpha \in \Omega_1$). (Zuerst folgt, daß Z ein guter Nenner ist !)
- (7) Weiterhin folgt aus 2.2 (Vorl), daß für alle $J \in I$ endlich $X_{\sim}^J/N_J$ vollständig ist. Insbesondere gilt also 1.7 (Vor2). Denn:

Sei $J \in I$ endlich, definiere wie in (3) R und D .

Sei für $\alpha \in J$ $M_{\alpha} := \eta_{\alpha}[\omega] \setminus D$. Beachtet man (5), so ist nach 2.2

$$X_{\alpha} \stackrel{\sim}{=} Z^{R \cup D} \times \prod_{\beta \in J \setminus \{\alpha\}} Z^{M_{\beta}} \times (Y_{\alpha} \cap Z^{M_{\alpha}}).$$

Dabei sei zur Vereinfachung der Schreibweise Y_{α} als Teilraum von Z^{ω_1} aufgefaßt (vermöge der von η_{α} vermittelten Einbettung). Ebenso sei $Z^{M_{\alpha}}$ und $Z^{R \cup D}$ als Teilraum von Z^{ω_1} aufgefaßt.

Beachtet man, daß wegen (2) $N_J = \Delta_{0J}(\bigcap_{\alpha \in J} X_{\alpha})$ gilt, so ist

$$N_J = \Delta_{0J}(Z^{R \cup D} \times \prod_{\alpha \in J} (Y_{\alpha} \cap Z^{M_{\alpha}})).$$

Entsprechend der Faktoren $Z^{R \cup D}$ bzw. der Beiträge von $Z^{M_{\beta}}$ bzw. $Y_{\alpha} \cap Z^{M_{\alpha}}$ für jedes $\beta \in J$ zu den X_{α} läßt sich $X_{\sim}^J/N_J$ als Produkt von Quotienten schreiben. Auf jeden dieser Quotienten ist 0.14 anzuwenden. Damit folgt die Vollständigkeit von $X_{\sim}^J/N_J$. $\square$

- (8) Insbesondere liefert 2.2 (Vorl) wegen 1.10:

$$X_{\sim}^I/N_I \text{ vollständig} \Leftrightarrow (Z^{\omega_1})^I = X_{\sim}^I + \Delta_{0I}(Z^{\omega_1}).$$

2.4 Folgerung

Es gelte Situation 2.2, dann:

$$X_{\sim}^I/N_I \text{ vollständig} \Leftrightarrow \forall z \in (Z^{\omega_1})_{\Omega_1} \quad \exists t \in Z^{\omega_1} \quad \forall \alpha \in \Omega_1 \quad z_{\alpha} - pr_{\eta_{\alpha}}(t) \in Y_{\alpha}$$

Die beiden Aussagen sind äquivalent, falls 2.2 (Vorl) gilt.

Beweis:

Die Behauptung folgt aus 1.10, 2.3 und aus

$$\begin{aligned} X_0^I = X_{\sim}^I + N_{0I} &\Leftrightarrow \forall z \in (Z^{\omega_1})_{\Omega_1} \quad \exists t \in Z^{\omega_1} \quad \forall \alpha \in \Omega_1 \quad pr_{\eta_{\alpha}}(z_{\alpha}) - pr_{\eta_{\alpha}}(t) \in Y_{\alpha} \\ &\Leftrightarrow \forall z \in (Z^{\omega_1})_{\Omega_1} \quad \exists t \in Z^{\omega_1} \quad \forall \alpha \in \Omega_1 \quad z_{\alpha} - pr_{\eta_{\alpha}}(t) \in Y_{\alpha}. \square \end{aligned}$$

2.5 Folgerung (Vergleiche 1.11 und 1.12 (2))

Ist Situation 2.2 einschließlich (Vorl) erfüllt und gilt $Y_\alpha^{(0)} = Z$ (als Menge) für alle $\alpha \in \Omega_1$, so ist (wegen 2.4) X_α^1/N_1 vollständig. Insbesondere ist dann also $(X, 1)$ guter Nenner, falls für alle $\alpha \in \Omega_1$ Y_α guter Nenner ist.

2.6 Satz

Es gelte Situation 2.2 einschließlich 2.2 (Vorl).

Es existiere $0 \neq A \in Z$ mit

$$\forall \alpha \in \Omega_1 \quad Y_\alpha + A^{(0)} = Z^{(0)}.$$

Jede A -Bemalung von $(\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ besitze eine Uniformisierung (vergleiche 2.1 und die Bemerkung danach).

Dann ist X_α^1/N_1 vollständig.

Insbesondere ist dann X ein guter Nenner, falls alle Y_α ($\alpha \in \Omega_1$) gute Nenner sind.

Beweis:

Sei gemäß 2.4 $(z_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1} \in (Z^{(0)})^{\Omega_1}$. Nach Voraussetzung wählen wir $(a_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1} \in (A^{(0)})^{\Omega_1}$ mit $z_\alpha - a_\alpha \in Y_\alpha$ ($\alpha \in \Omega_1$). Dann bildet a eine A -Bemalung, also existiert eine Uniformisierung $t \in A^{(0)}$ zu a . Für $\alpha \in \Omega_1$ ist $a_\alpha - \text{pr}_{\eta_\alpha}(t) \in Z^{(0)} \cap Y_\alpha$, also ist auch $z_\alpha - \text{pr}_{\eta_\alpha}(t) \in Y_\alpha$. Damit folgt die Behauptung, wenn man zusätzlich $N_1 \hat{=} X$ (1.2), sowie 2.3 (6) und 0.5 beachtet. $\square$

2.7 Beispiele

(1) Ist in Situation 2.2 $|Z| < \omega$, so nehme man in 2.6 $A := Z$.

(2) Sei $Z := \mathbb{K}$, $Y_\alpha := c_0$ ($\alpha \in \Omega_1$). Der nach 2.2 resultierende lokalkonvexe Vektorraum $X \subset \mathbb{K}^{(\Omega_1)}$ ist nach 2.6 ein guter Nenner, falls jede ω -Bemalung eine Uniformisierung besitzt. Man nehme hierzu in 2.6 $A := Q$. Das analoge Resultat erhält man für $Y_\alpha := l_p$ ($p \geq 1$).

Man beachte, daß 2.6 die Folgerung 2.5 als Sonderfall enthält. Ist nämlich $Y_\alpha = Z^{(0)}$ ($\alpha \in \Omega_1$), so wähle man $A := \{0\}$, d.h. $|A| = 1$. Jede 1-Bemalung besitzt trivialerweise (in ZFC) eine Uniformisierung.

Während 2.6 fordert, daß Y_α nicht zu "dünn" in Z liegt, benötigen wir in 2.8 eine "Nullfolgenbedingung".

2.8 Satz

Es gelte Situation 2.2 (2.2 (Vori) wird nicht gefordert).

Es existiere $B \subset Z$ und $\emptyset \neq A \subset Z$ mit:

$(a + B)_{a \in A}$ ist eine paarweise disjunkte Familie,
und

$$\forall_{\alpha \in \Omega_1} Y_\alpha \subset Z^{(\omega)} + B^{(\omega)}.$$

Es existiere eine A -Bemalung ohne Uniformisierung.

Dann ist X_∞^I/N_I unvollständig, insbesondere ist X ein schlechter Nenner.

Man beachte, daß A -Bemalungen ohne Uniformisierung nur für $|A| \leq \omega_1$ in ZFC existieren. Weiterhin existieren sie für $2 \leq |A| \leq \omega$, falls man zusätzliche mengentheoretische Axiome fordert, z.B. $MA + \neg CH$. Man vergleiche die Bemerkung nach 2.1.

Beweis:

Sei $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ eine a -Bemalung. Sei X_∞^I/N_I vollständig. Wir setzen für $\alpha \in \Omega_1$ und $n \in \omega$ $z_{\alpha,n} := f_\alpha(n)$. Nach 2.4 existiert dann ein $t_\alpha \in Z^{(\omega)}$ mit

$$\forall_{\alpha \in \Omega_1} \text{pr}_{\eta_\alpha}(t) - z_\alpha \in Y_\alpha \subset Z^{(\omega)} + B^{(\omega)}.$$

Wir setzen für $\alpha \in \Omega_1$ $g(\alpha) := a$, falls ein $a \in A$ existiert mit $t_\alpha \in a + B$, sonst setzen wir $g(\alpha)$ beliebig. g ist dann eine Uniformisierung von $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$, denn:

Sei $\alpha \in \Omega_1$. Es ist $\text{pr}_{\eta_\alpha}(t) - z_\alpha \in Z^{(\omega)} + B^{(\omega)}$, also existiert ein $n \in \omega$ mit

$$\forall_{m \geq n} t_{\eta_\alpha(m)} - z_{\alpha,m} = t_{\eta_\alpha(m)} - f_\alpha(m) \in B. \text{ Somit ist}$$

$$\forall_{m \geq n} t_{\eta_\alpha(m)} \in f_\alpha(m) + B, \text{ also } \forall_{m \geq n} g(\eta_\alpha(m)) = f_\alpha(m). \quad \square$$

2.9 Folgerung

Sei in Situation 2.2 $Y_\alpha = Z^{(\omega)}$ für alle $\alpha \in \Omega_1$ und sei $|Z| \leq \omega_1$. Dann ist X ein schlechter Nenner (in ZFC).

Beweis:

Setze in 2.8 $B := \{0\}$ und $A := Z \setminus 0$.

2.10 Beispiele

(1) Folgerung 2.9 liefert einen lokalkonvexen Vektorraum X , der in ZFC ein schlechter Nenner ist. Man setze hierzu $Z: \mathbb{K}$ und $Y_\alpha: \mathbb{K}^{(\omega)}$ versehen mit der feinsten lokalkonvexen Topologie. Man beachte, daß die Topologie auf Y_α selbst irrelevant ist, soweit die Situation 2.2 (ohne (Vorl)) erfüllt ist.

(2) Gilt nun (in der allgemeinen Situation 2.2) $2 < |Z| < \omega$ und $Y_\alpha = Z^{(\omega)}$ für alle $\alpha \in \Omega_1$, Y_α versehen mit der diskreten Topologie, so gilt wegen 2.6 und 2.8 (man vergleiche auch 2.7 (1)):

X ist genau dann ein guter Nenner, wenn jede Z -Bemalung von $(\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ eine Uniformisierung besitzt.

Insbesondere ist X unter der Annahme von CH ein schlechter, unter der Annahme von $MA + \neg CH$ ein guter Nenner.

(3) Sei nun $Z: \mathbb{K}$ und $Y_\alpha := c_0$ ($\alpha \in \Omega_1$) versehen mit der üblichen Normtopologie. Für den resultierenden lokalkonvexen Vektorraum (gemäß 2.2) gilt dann:

X ist genau dann ein guter Nenner, falls jede ω -Bemalung eine Uniformisierung besitzt.

Insbesondere ist X unter CH ein schlechter und unter $MA + \neg CH$ ein guter Nenner.

Man vergleiche hierzu 2.7 (2). für die Anwendung von 2.8 wähle man für B die Einheitskugel in $\mathbb{K}$, sowie für A eine geeignete abzählbare Menge, z.B. $3\mathbb{Z}$.

Man erhält das gleiche Resultat, wenn man für Y_α einen l_p Raum ($p < \omega$) oder einen anderen "Nullfolgenraum" wählt.

In 7.4 werden wir nachträglich sehen, daß die in den Beispielen 2.10 (2) und (3) aufgeführten Räume in keinem Modell von ZFC Produkte metrisierbarer kommutativer topologischer Gruppen sind.

Die Beispiele 2.10 (2) und 2.10 (3) zeigen, daß es Räume gibt, die gleichzeitig die Voraussetzungen von 2.6 und 2.8 erfüllen, wenn man von den mengentheoretischen Voraussetzungen absieht. Daneben verbleibt jedoch auch eine "Lücke", d.h. es existieren "naheliegende" Räume, die die Situation 2.2 (einschließlich (Vorl)) erfüllen, für die jedoch auch unter den entsprechenden mengentheoretischen Annahmen 2.6 und 2.8 nicht anwendbar sind. Diese Lücke werden wir in Abschnitt 6 (siehe 6.10) teilweise schließen. Insbesondere wird in der Situation 2.2 mit $Z: \mathbb{K}$ und $Y_\alpha = l_\infty$ ($\alpha \in \Omega_1$) X ein schlechter Nenner sein. Dazu werden wir jedoch mengentheoretische Annahmen treffen müssen, die weit schärfer als CH sind. Ob (in diesem Beispiel) diese Annahmen auch notwendig sind, konnte von mir leider nicht geklärt werden.

In den folgenden beiden Aussagen reichen wir den Beweis dafür nach, daß die Existenz von Bemalungen ohne Uniformisierung in ZFC nicht entscheidbar ist. Man vergleiche hierzu die Bemerkung nach 2.1.

2.11 Lemma

weak $\diamond \Rightarrow$ Jedes Leitersystem besitzt eine 2-Bemalung ohne Uniformisierung.

Beweis:

Der Beweis ist [2] entnommen, er wird hier angeführt, da er die Wirkungsweise des $\diamond$ -Prinzips sehr gut sichtbar macht.

Sei $(\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ ein Leitersystem.

Für $\alpha \in \Omega_1$ setzen wir $P_\alpha := \{ x \subset \alpha : |x \cap \eta_\alpha[\omega]| = \infty \}$.

Gemäß weak $\diamond$ (siehe 0.9 (5)) existiert $z \subset \omega_1$, so daß für jedes $x \subset \omega_1$ die Menge $\{ \alpha \in \Omega_1 : x \cap \alpha \in P_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in z \}$ stationär in ω_1 ist. Man beachte, daß "stationär $\cap$ Club = stationär" gilt und daß Ω_1 ein Club ist, so daß wir uns auf Ω_1 zurückziehen konnten.

Wir setzen für $\alpha \in \Omega_1$, $n \in \omega$ $f_\alpha(n) := 1$, falls $\alpha \notin z$ und 0 sonst. Wir erhalten eine 2-Bemalung, wobei f_α sogar (für festes α) konstant ist. Sei nun $g: \omega_1 \rightarrow 2$. Wir fassen g als Teilmenge von ω auf. Damit existiert (nach Wahl von z) ein $\alpha \in \Omega_1$ mit $g \cap \alpha \in P_\alpha \Leftrightarrow \alpha \in z$. Somit gilt:

$$\forall_{n \in \omega} f_\alpha(n) = 1 \Leftrightarrow \alpha \notin z \Leftrightarrow g \cap \alpha \notin P_\alpha \Leftrightarrow |g \cap \eta_\alpha[\omega]| < \infty.$$

Letzteres ist äquivalent dazu, daß $g(\eta_\alpha(n)) = 0$ ist für fast alle $n \in \omega$. Also ist g keine Uniformisierung zu $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$. $\square$

2.12 Lemma

$MA + \neg CH \Rightarrow$ Jede ω -Bemalung jedes Leitersystems besitzt eine Uniformisierung.

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zu [2, Theorem 5.2], dort wird die Behauptung nur für 2-Bemalungen gezeigt.

Sei $((\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega_i}, (f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_i})$ ein Leitersystem mit ω -Bemalung.

1) Sei $\mathfrak{M} := \left\{ (J, h) : J \subset \Omega_i \text{ endlich, } h: \bigcup_{\delta \in J} \eta_\delta[\omega] \rightarrow \omega \text{ mit} \right.$

$$\left. \forall_{\delta \in J} \exists (n \in \omega : h(\eta_\delta[\omega]) \neq f_\delta(n)) \in \omega \right\}.$$

Wir versehen $\mathfrak{M}$ mit der folgenden Ordnung " $<$ ":

$(J, h) < (J', h') \Leftrightarrow J \subset J'$ und h' setzt h fort.

2) $(\mathfrak{M}, <)$ erfüllt c.c.c. (vergleiche 0.8):

Sei dazu $(J_\alpha, h_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ eine Familie paarweiser verschiedener Elemente von $\mathfrak{M}$. Zu zeigen ist, daß diese Familie kompatible Elemente enthält.

Für $\alpha \in \omega_1$ setze $P_0(\alpha) := \max(\alpha \cap J_\alpha)$ (mit $0 := \max \emptyset$).

Es ist für alle $\alpha \in \omega_1, \alpha > 1$ $P_0(\alpha) < \alpha$, also existiert nach dem Pressing down Lemma (0.10 (2)) ein $\lambda_0 \in \omega_1$ und eine stationäre Menge S_0 in ω_1 , so daß für alle $\alpha \in S_0$ $P_0(\alpha) = \lambda_0$ gilt. Sei ohne Einschränkung $\min S_0 = \lambda_0$. Sei für $\alpha \in S_0$ $v(\alpha)$ der Nachfolger von α in S_0 .

Für $\alpha \in S_0$ setze $P_1(\alpha) := \sup \{ \alpha \cap \eta_\delta(n) : n \in \omega, \delta \in J_{v(\alpha)} \}$

Es ist für alle $\alpha \in S_0$ $P_1(\alpha) < \alpha$, denn $P_1(\alpha) < \alpha$ ist klar, wir zeigen $P_1(\alpha) \neq \alpha$:

Da $J_{v(\alpha)}$ endlich ist, genügt es für festes $\delta \in J_{v(\alpha)}$ zeigen:
 $\alpha \neq \sup(\alpha \cap \eta_\delta[\omega]).$

Ist $\delta < \lambda_0$, so ist wegen $\alpha \in S_0$ und $\lambda_0 \in \min S_0$ $\delta < \alpha$, also ist

$$\sup(\alpha \cap \eta_\delta[\omega]) = \sup \eta_\delta[\omega] = \delta < \alpha.$$

Ist $\delta > v(\alpha)$, so ist $\alpha \cap \eta_\delta[\omega]$ endlich, also ist $\alpha \neq \sup(\alpha \cap \eta_\delta[\omega]).$

Der Fall $\lambda_0 < \delta < v(\alpha)$ kann nicht eintreten: Wegen $\delta \in J_{v(\alpha)}$ wäre sonst $P_0(v(\alpha)) \geq \delta > \lambda_0$ im Widerspruch zu $v(\alpha) \in S_0$.

Wieder nach dem Pressing-down Lemma existiert eine stationäre Menge $S_1 \subset S_0$ und ein $\lambda_1 \in \omega_1$ mit $P_1(\alpha) = \lambda_1$ für alle $\alpha \in S_1$.

Durch weiteres Verkleinern von S_1 (S_1 verbleibt dabei stationär) ist zusätzlich erreichbar, daß für ein festes $A \subset \lambda_1 + 1$ gilt:

$$\forall_{\alpha \in S_1} \left(\bigcup_{\delta \in J_{v(\alpha)}} \eta_\delta[\omega] \right) \cap (\lambda_1 + 1) = A.$$

Denn das Pressing-Down Lemma impliziert folgende Aussage:

- (a) Sei X eine Menge mit $|X| \leq \omega$ und sei $f: \omega_1 \rightarrow X$ eine Abbildung.
 Sei S stationär in ω_1 . Dann existiert $S' \subset S$ stationär und $x \in X$ mit $f(\alpha) = x$ für alle $\alpha \in S'$.

Nun ist $J_{\nu(\alpha)} \cap (\lambda_1 + 1)$ endlich, $(\lambda_1 + 1)$ ist abzählbar, also ist (a) anwendbar mit $f(\alpha) := J_{\nu(\alpha)} \cap (\lambda_1 + 1)$ und $X := \{x \in \lambda_1 + 1 : |x| < \omega\}$. Also ist zuerst erreichbar, daß für ein geeignetes $\hat{J}$ gilt:

- (b) $\bigvee_{\alpha \in S_1} J_{\nu(\alpha)} \cap (\lambda_1 + 1) = \hat{J}$.

Weiter ist $\bigcup \{ \eta_\delta[\omega] : \delta \in J_{\nu(\alpha)}, \delta > \lambda_1 \} \cap (\lambda_1 + 1)$ endlich, also ist mittels (a) zusätzlich erreichbar, daß diese Menge auf S_1 konstant ist.

Zusammen mit (b) erhält man die gewünschte Aussage.

Die Bemalung ist abzählbar, also ist durch weiteres Verkleinern von S_1 (S_1 verbleibt dabei stationär) zusätzlich erreichbar, daß eine Abbildung $\hat{h}: A \rightarrow \omega$ existiert, so daß für alle $\alpha \in S_1$ gilt

$$h_{\nu(\alpha)|A} = \hat{h}.$$

Dazu wollen wir (a) anwenden mit $X := \{h_{\nu(\alpha)|A} : \alpha \in S_1\}$ und $f: S_1 \rightarrow X$, $\alpha \mapsto h_{\nu(\alpha)|A}$. X ist abzählbar, denn für $\delta \in J_{\nu(\alpha)}$ mit $\alpha \in S_1$ gilt:

Entweder ist $\delta > \lambda_1$, also $\eta_\delta[\omega] \cap A$ endlich, oder es ist $\delta \in \hat{J}$ (mit $\hat{J}$ wie oben) und $h_{\nu_\delta(\alpha)} \upharpoonright \eta[\omega]$ stimmt mit der Bemalung f_δ bis auf an endlich vielen Stellen überein. Da die Bemalung abzählbar ist, ist somit auch X abzählbar.

Nach dem Löwenheim-Skolem Theorem (siehe 0.10 (1)) ist die Menge

$$C := \left\{ \alpha \in \omega_1 : \beta \in \bigvee_{0 < \alpha} \max J_{\nu(\beta)} < \alpha \right\}$$

ein Club in ω_1 . (Setze hierzu $f(\alpha) := \max J_{\nu(\alpha)}$ für $\alpha \in S_0$ und 0 sonst).

Somit existieren $\alpha, \beta \in C \cap S_1$ mit $\alpha < \beta$.

Es ist $\max J_{\nu(\alpha)} < \beta$, also ist $\bigcup_{\delta \in J_{\nu(\alpha)}} \eta_\delta[\omega] \subset \beta$.

Andererseits ist $\beta \in S_1$, also ist $P_1(\beta) = \lambda_1$, damit ist

$$\left(\bigcup_{\delta \in J_{\nu(\beta)}} \eta_\delta[\omega] \right) \cap \lambda_1, \beta \} = \emptyset \quad (\text{nach Definition von } P_1).$$

Damit ist der Durchschnitt der Definitionsbereiche von $h_{\nu(\alpha)}$ und $h_{\nu(\beta)}$ in $\lambda_1 + 1$, also gleich A , dort stimmen die beiden Abbildungen überein.

Damit sind die beiden Abbildungen kompatibel.

3) Für $\alpha \in \Omega_1$ setzt man $D_\alpha := \{(J, h) \in \mathfrak{M} : \alpha \in J\}$. Damit ist (wie man leicht sieht) für jedes $\alpha \in \Omega_1$ D_α dicht in $\mathfrak{M}$.

Nach Voraussetzung "CH" ist $|\Omega_1| < 2^\omega$, also existiert nach MA ein Filter G in $\mathfrak{M}$, der jedes D_α ($\alpha \in \Omega_1$) schneidet.

Für $\alpha \in \Omega_1$ existiert somit $(J, h) \in G$ mit $\alpha \in J$ und damit existiert für $\iota \in \omega_1$ ein $(J, h) \in G$ mit $\iota \in \bigcup_{\alpha \in J} \eta_\alpha[\omega]$ (der Definitionsbereich von h !).

Wir definieren $g: \omega_1 \rightarrow \omega$ durch $g(\iota) := h(\iota)$ (h wie soeben).

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von h , da alle Elemente von G kompatibel sind. Man sieht leicht, daß g eine Uniformisierung von $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ ist. $\square$

Im zweiten Teil dieses Abschnitts untersuchen wir kommutative topologische Gruppen $X \subset Z^{(\Omega)}$, die die Initialtopologie zu auf den Abschnitten $Y_\alpha \subset Z^\alpha$ ($\alpha \in \Omega_1$) definierten Räumen tragen.

2.13 Situation

Sei Z eine vollständige separierte komTG.

Sei für $\alpha \in \Omega_1$ Y_α eine vollständige separierte komTG mit $Z^{(\alpha)} \subset Y_\alpha \subset Z^\alpha$

und

$t_{Y_\alpha} \supset t_{k\text{oor}}$ (t_{Y_α} sei die Topologie von Y_α , $t_{k\text{oor}}$ sei die Spur der Produkttopologie)

und für $\alpha, \beta \in \Omega_1$, $\alpha < \beta$ gelte:

$Y_\alpha \subset Y_\beta$ (vermöge der kanonischen Inklusion $Z^\alpha \subset Z^\beta$),

$\text{pr}_{\alpha\beta}(Y_\beta) = Y_\alpha$ und $\text{pr}_{\alpha\beta}|_{Y_\beta} : Y_\beta \rightarrow Y_\alpha$ sei stetig.

(Dabei sei $\text{pr}_{\alpha\beta} : Z^\beta \rightarrow Z^\alpha$ die kanonische Projektion).

Sei für $\alpha \in \Omega_1$ $\text{pr}_\alpha : Z^{(\Omega)} \rightarrow Z^\alpha$ die kanonische Projektion und sei

$X := \bigcap_{\alpha \in \Omega_1} \text{pr}_\alpha^{-1}[Y_\alpha]$ versehen mit der Initialtopologie t zu

$\text{pr}_\alpha|_X : X \rightarrow Y_\alpha$ ($\alpha \in \Omega_1$).

2.14 Bemerkung

Es gelte Situation 2.13.

- (1) Sei $t_0 := t_{k\text{oor}}$ die Spur der Produkttopologie auf X . Sei für $\alpha \in \Omega_1$ t_α das Supremum von t_0 und von der Initialtopologie zu $\text{pr}_\alpha|_X : X \rightarrow Y_\alpha$. Offensichtlich ist $X_0 := Z^{(\Omega)}$ die vollständige Hülle zu (X, t_0) . Weiter ist $X_\alpha := \text{pr}_\alpha^{-1}(Y_\alpha)$ die vollständige Hülle zu (X, t_α) ($\alpha \in \Omega_1$). Sei dazu $E \subset \omega_1$ endlich und $x \in Z^{(\Omega)}$ mit $(x_i)_{i \in \alpha} \in Y_\alpha$ und $x_i = 0$ für $i > \alpha$, $i \notin E$. Zeige $x \in X$ (damit ist X dicht in X_α bezüglich t_α , die Vollständigkeit von X_α ist offensichtlich). Für $\beta < \alpha$ ist $\text{pr}_{\beta\alpha}(Y_\alpha) = Y_\beta$, also ist $\text{pr}_\beta(x) \in Y_\beta$. Für $\beta < \alpha$ ist $Y_\alpha \subset Z^{(\beta)} \subset Y_\beta$, also ist $\text{pr}_\beta(x) \in Y_\beta$. Offensichtlich ist damit die Situation 1.1 erfüllt (mit $I := \Omega_1$).
- (2) Wegen $\text{pr}_{\alpha\beta}|_{Y_\beta} : Y_\beta \rightarrow Y_\alpha$ stetig ist das System $(t_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ gerichtet, also ist nach Bemerkung 1.8 (5) 1.7 (Vor1) und (Vor2) erfüllt. Somit gilt nach 1.10:
 X_∞^I / N_I vollständig $\Leftrightarrow X_\infty^I + \Delta_{\Omega_1}(Z^{(\Omega)}) = H_e$.
- (3) Ist für $\alpha \in \Omega_1$ Y_α ein guter Nenner und ist Z ein guter Nenner, so ist wegen $X_\alpha \approx Y_\alpha \times Z^{(\Omega) \setminus \alpha}$ X_α ein guter Nenner.

2.15 Folgerung

Es gelte Situation 2.13. Dann ist die Vollständigkeit von $X_{\sim}^I / N_I$ äquivalent zu:

Für jedes $z \in \prod_{\alpha \in \Omega_1} Z^\alpha$ mit $\bigvee_{\substack{\alpha, \beta \in \Omega_1 \\ \alpha \neq \beta}} z_\alpha - pr_{\alpha\beta}(z_\beta) \in Y_\alpha$
 existiert ein $t \in Z^{\omega_1}$ mit $\bigvee_{\alpha \in \Omega_1} z_\alpha - pr_{\alpha\omega_1}(t) \in Y_\alpha$.

Beweis:

Wegen Bemerkung 2.14 (2) ist nur zu zeigen (vergleiche auch 2.4):

$$H_e = \{ z \in (Z^{\omega_1})^I : \bigvee_{\substack{\alpha, \beta \in \Omega_1 \\ \alpha \neq \beta}} pr_\alpha(z_\alpha) - pr_\alpha(z_\beta) \in Y_\alpha \}.$$

Dies ist jedoch offensichtlich, wenn man $X_\alpha \supset X_\beta$ ($\alpha, \beta \in \Omega_1, \alpha < \beta$) beachtet. □

Jetzt müssen wir noch das passende kombinatorische Prinzip bereitstellen, die folgenden Begriffe bilden wir dabei in Analogie zu 2.1.

2.16 Definition

Sei A eine Menge, $A \neq \emptyset$. (In der Regel wieder eine Kardinalzahl).

- (1) Eine A -Abschnittsbemalung (von ω_1) ist eine Familie $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ von Abbildungen $f_\alpha : \alpha \rightarrow A$, so daß gilt:

$$\bigvee_{\substack{\alpha, \beta \in \Omega_1 \\ \alpha < \beta}} |\{ \iota : \alpha : f_\alpha(\iota) \neq f_\beta(\iota) \}| < \omega.$$

- (2) Eine Uniformisierung einer A -Abschnittsbemalung $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ ist eine Abbildung $g : \omega_1 \rightarrow A$, so daß gilt:

$$\bigvee_{\alpha \in \Omega_1} |\{ \iota : \alpha : f_\alpha(\iota) \neq g(\iota) \}| < \omega.$$

Man beachte die Zusatzforderung in 2.16 (1) (im Vergleich zu 2.1 (2)), die nötig ist, damit Uniformisierungen überhaupt denkbar sind. Wieder existieren für $|A| < \omega_1$ A -Abschnittsbemalungen ohne Uniformisierung, wieder verbleiben als einzig wesentliche Fälle die Möglichkeiten $A=2$ und $A=\omega$. (Benutze 2.17 (2) und die Bemerkung nach 2.1).¹⁾

2.17 Lemma

Sei $\emptyset \neq A$ eine Menge, $(\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ ein Leitersystem, dann gilt:

- (1) Ist $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ eine A -Bemalung des Leitersystems, so existiert eine A -Abschnittsbemalung $(\widehat{f}_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ mit $\bigvee_{\alpha \in \Omega_1} \bigvee_{n \in \omega} f_\alpha(n) = \widehat{f}_\alpha(\eta_\alpha(n))$.
 (D.h. die Abschnittsbemalung setzt die Bemalung des Leitersystems fort.)
- (2) Besitzt jede A -Abschnittsbemalung eine Uniformisierung, so besitzt auch jede A -Bemalung jedes Leitersystems eine Uniformisierung.

¹⁾ Eine nach Abschluß der Arbeit eingegangene Mitteilung von Herrn Professor H.D. Gonder, FU Berlin, zeigt, daß in ZFC für jedes A mit unendlichen $\neq$ Elementen A -Abschnittsbemalungen ohne Uniformisierung existieren. Dies vereinfacht die im folgenden gewonnenen Resultate betragsmäßig und Lemma 2.17 überflüssig.

Man beachte, daß aus 2.17 (2) zusammen mit 2.11 folgt:

Unter weak $\dagger$ (insbesondere unter CH) existiert eine 2-Abschnittsbemalung ohne Uniformisierung.

Leider ist mir nicht bekannt, ob eine Umkehrung von 2.17 (2) gilt. Allgemeiner ist mir nicht bekannt, ob die Existenz einer 2-Abschnittsbemalung (oder einer ω -Abschnittsbemalung) ohne Uniformisierung unabhängig von ZFC ist. "

Beweis (von 2.17):

Die Aussage (2) ist offensichtlich eine direkte Folgerung aus (1), wir zeigen (1). Sei dazu $(\eta_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ und $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ gegeben.

Sei $\alpha \in \Omega_1$ und sei für alle $\beta \in \Omega_1$, $\beta < \alpha$ $\widehat{f}_\alpha$ bereits wie gefordert konstruiert, d.h. es gilt:

$$\bigvee_{\beta \in \Omega_1, \beta < \alpha} \bigvee_{n \in \omega} f_\beta(n) = \widehat{f}_\beta(\eta_\beta(n))$$

und

$$\bigvee_{\gamma < \beta < \alpha} \bigvee_{\gamma, \beta \in \Omega_1} |\{ \iota \in \gamma : \widehat{f}_\gamma(\iota) \neq \widehat{f}_\beta(\iota) \}| < \omega.$$

Wir setzen für $n \in \omega$ $\widehat{f}_\alpha(\eta_\alpha(n)) := f_\alpha(n)$.

Sei nun $n \in \omega$, $\iota \in J_n := \begin{cases} [0, \eta_\alpha(0)] & \text{für } n=0 \\ [\eta_\alpha(n-1), \eta_\alpha(n)] & \text{sonst.} \end{cases}$

Falls $\eta_\alpha(n) \in \omega$ ist, so setzen wir $\widehat{f}_\alpha(\iota)$ beliebig (da $\Lambda \neq \emptyset$).

Sonst wählen wir $\tau \in \Omega_1$ maximal mit $\tau < \eta_\alpha(n)$.

Gilt dann $\tau < \iota$, so setzen wir $\widehat{f}_\alpha(\iota)$ beliebig,

sonst setzen wir $\widehat{f}_\alpha(\iota) := \widehat{f}_\tau(\iota)$.

Sei nun $\beta \in \Omega_1, \beta < \alpha$. Zu zeigen ist $|\{ \iota \in \beta : \widehat{f}_\beta(\iota) \neq \widehat{f}_\alpha(\iota) \}| < \omega$.

Es existiert $n_0 \in \omega$ mit $\beta < \eta_\alpha(n_0)$. Sei $n \leq n_0$ fest. Es genügt zu zeigen, daß $|\{ \iota \in J_n \cap \beta : \widehat{f}_\beta(\iota) \neq \widehat{f}_\alpha(\iota) \}| < \omega$ ist. Ist $\eta_\alpha(n) \in \omega$, so ist J_n endlich, sei also $\eta_\alpha(n) > \omega$. Wir betrachten τ gemäß obiger Konstruktion. Offensichtlich genügt es zu zeigen, daß $|\{ \iota \in J_n \cap \beta \cap \tau : \widehat{f}_\beta(\iota) \neq \widehat{f}_\alpha(\iota) \}| < \omega$ ist. Hier stimmt jedoch $\widehat{f}_\alpha$ mit $\widehat{f}_\tau$ überein, also ist dies nach Induktionsannahme erfüllt. $\square$

2.18 Satz

Es gelte Situation 2.13.

- (1) Es existiere $B \subset Z$ und $\emptyset \neq A \subset Z$ mit

$(a+B)_{a \in A}$ ist eine paarweise disjunkte Familie
und

$$\forall_{\alpha \in \Omega_1} Y_\alpha \subset Z^{(\alpha)} + B^\alpha.$$

Dann gilt:

Existiert eine A -Abschnittsbemalung ohne Uniformisierung, so ist X_ω^I / N_I unvollständig, also X ein schlechter Nenner.

Insbesondere ist X (in ZFC) ein schlechter Nenner, falls $|A| \geq \omega_1$ ist, ist $|A| \geq 2$, so ist X unter weak $\circ$ ein schlechter Nenner.

- (2) Es gelte für alle $\alpha \in \Omega_1$ $Y_\alpha = Z^{(\alpha)}$ (als Menge).

Dann gilt:

Besitzt jede Z -Abschnittsbemalung eine Uniformisierung, so ist X_ω^I / N_I vollständig. Insbesondere ist dann also X ein guter Nenner, falls zusätzlich Y_α ($\alpha \in \Omega_1$) und Z gute Nenner sind.

Beweis:

Der Beweis verläuft mittels 2.15 analog zu 2.8 bzw. 2.6.

Zu (1): Sei $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ eine A -Abschnittsbemalung und sei X_ω^I / N_I vollständig.

Wir fassen f als Element von $(Z^\alpha)^{\Omega_1}$ auf. Damit gilt für $\alpha, \beta \in \Omega_1$, $\alpha < \beta$ $f_\alpha = \text{pr}_{\alpha\beta}(f_\beta) \in Z^{(\alpha)} \subset Y_\alpha$. Also existiert nach 2.15 ein $t \in Z^{\omega_1}$, so daß für alle $\alpha \in \Omega_1$ gilt $\text{pr}_\alpha(t) = f_\alpha \in Y_\alpha \subset Z^{(\alpha)} + B^\alpha$.

Wir setzen für $\iota \in \omega_1$ $g(\iota) := a$, falls $t_\iota \in a+B$ für ein geeignetes $a \in A$ gilt, und sonst beliebig. Damit ist für $\alpha \in \Omega_1$ $t_\iota \in f_\alpha(\iota) + B$ für fast alle $\iota < \alpha$, wegen $t_\alpha(\iota) \in A$ folgt damit $g(\iota) = f_\alpha(\iota)$ für fast alle $\iota < \alpha$. Also ist g eine Uniformisierung zu $(f_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$.

Zu (2): Sei gemäß 2.15 $(z_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1} \in (Z^\alpha)^{\Omega_1}$ mit $\forall_{\substack{\alpha, \beta \in \Omega_1 \\ \alpha < \beta}} z_\alpha = \text{pr}_{\alpha\beta}(z_\beta) \in Y_\alpha$.

Es ist $Y_\alpha = Z^{(\alpha)}$, also ist $(z_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$ eine Z -Abschnittsbemalung.

Nach Voraussetzung existiert eine Uniformisierung g zu $(z_\alpha)_{\alpha \in \Omega_1}$. Damit gilt für alle $\alpha \in \Omega_1$ $z_\alpha = \text{pr}_\alpha(g) \in Z^{(\alpha)} = Y_\alpha$ (wobei man g als Element von Z^{ω_1} auffaßt). 2.15 liefert dann zusammen mit 0.5 die Behauptung. $\square$

Offensichtlich ist 2.18 (1) die exakte Parallele zu 2.8. Dagegen ist 2.18(2) wesentlich spezieller als die parallele Aussage in 2.6. Es liegt nahe, eine 2.6 entsprechende Aussage zu formulieren. Dazu müßte jedoch der Begriff der Abschnittsbemalung noch allgemeiner gehalten werden, vermutlich ist er nicht mehr unabhängig von Y_α definierbar. Dieses Vorgehen erscheint jedoch nicht sinnvoll, da bereits bei der vorliegenden Definition die Existenz eines Modelles von ZFC, in dem jede 2 Abschnittsbemalung eine Uniformisierung besitzt, nicht gesichert ist. "

2.19 Beispiele

- (1) Sei $Y_\alpha := c_0(\alpha)$, der Banachraum der Nullfolgen in $\mathbb{K}$ ($\alpha \in \Omega_1$).

Sei $(X, \mathfrak{I})$ gemäß Situation 2.13.

Dann ist $X = c_0(\omega_1)$ (als Menge), $\mathfrak{I}$ ist echt gröber als die Normtopologie. Die Voraussetzungen zu 2.18 (1) sind erfüllt. Wieder nehme man für B die Einheitskugel in $\mathbb{K}$ und für A z.B. 3.7. Insbesondere existiert auf $c_0(\omega_1)$ (bezüglich der Normtopologie) eine gröbere separierte vollständige lokalkonvexe Topologie, die $c_0(\omega_1)$ unter CH (es reicht weak *) zu einem schlechten Nenner macht. "

- (2) Sei Z eine nicht triviale komTG versehen mit der diskreten Topologie und sei $Y_\alpha := Z^{(\alpha)}$ mit der diskreten Topologie. Sei $(X, \mathfrak{I})$ gemäß 2.13, insbesondere ist $X = Z^{(\omega_1)}$ (als Menge). Dann gilt nach 2.18:

$(X, \mathfrak{I})$ ist guter Nenner $\Leftrightarrow$ Jede Z -Abschnittsbemalung besitzt eine Uniformisierung.

(1) Gemäß der Fußnote 1) auf Seite 33 existiert in ZFC die benötigte Abschnittsbemalung ohne Uniformisierung.

3 Der Raum φ

In diesem Abschnitt wollen wir den lokalkonvexen Vektorraum φ untersuchen. φ bezeichnet hierbei den Raum $\mathbb{K}^{(\omega)}$, versehen mit der feinsten (lokalkonvexen) Vektorraumtopologie. Parallel dazu erzielen wir Ergebnisse auf "ähnlich gebauten" Räumen.

Wir benutzen in diesem Abschnitt wieder die Ergebnisse des ersten Abschnitts.

Wichtigstes Resultat wird sein, daß φ unter der Annahme der Kontinuumshypothese CH ein schlechter Nenner ist. Folglich sind die bekannten Eigenschaften von φ , wie tonnellert, separabel, feinste lokalkonvexe Topologie, abzählbardimensional usw., nicht hinreichend dafür, daß ein Vektorraum ein guter Nenner ist. Ebenso ist somit unter CH jede unendliche (lokalkonvexe) direkte Summe nicht trivialer lokalkonvexer Räume ein schlechter Nenner, und ebenso jeder unendlich dimensionale Vektorraum, wenn er mit der feinsten lokalkonvexen Topologie oder der feinsten Vektorraumtopologie versehen wird.

Wir betrachten folgende Situation:

3.1 Situation

Sei κ eine Limesordinalzahl.

Sei (X, t) eine vollständige separierte komTG.

Sei für $\alpha < \kappa$ eine ~~separierte~~ Gruppentopologie auf X und (X_α, t_α) die vollständige separierte Hülle zu (X, t_α) .

Es gelte:

- (1) $t = \bigvee_{\alpha < \kappa} t_\alpha$,
sowie für alle $\alpha < \beta < \kappa$:
- (2) $t_\alpha \subset t_\beta$,
- (3) Die kanonische Abbildung $j_\alpha: X_\alpha \rightarrow X_0$ sei injektiv, wir betrachten somit X_α als Teilraum von X_0 .
- (4) $X_\alpha \not\supset X_\beta$.

3.2 Bemerkung

Es gelte Situation 3.1.

- (1) Offensichtlich ist damit die Situation 1.1 erfüllt.
- (2) Nach 1.8 (5) sind (Vor1) und (Vor2) in 1.7 erfüllt.
- (3) Es gilt (vergleiche 1.4):

$$H_e = \{ z \in X_0^x : \forall_{\alpha \in \beta \in x} z_\alpha = z_\beta \in X_\alpha \}.$$

Der Beweis verläuft analog zu 2.15.

- (4) Insbesondere folgt nach 1.10:

$$\begin{aligned} X_\sim^x / N_x \text{ vollständig} &\Leftrightarrow H_e = X_\sim^x + N_{0x} \\ &\Leftrightarrow \forall_{z \in H_e} \exists_{t \in X_0} \forall_{\alpha \in x} z_\alpha = t \in X_\alpha \end{aligned}$$

Man beachte auch hier, daß $\Delta_x: X \rightarrow N_x$ ein topologischer Isomorphismus ist.

3.3 Satz

Es gelte Situation 3.1, dabei sei x eine Kardinalzahl. Weiter gelte:

- (1) $|X_0| \leq x$,
- (2) $\forall_{\alpha \in x \cap \text{LIM}} X_\sim^\alpha / N_\alpha$ ist vollständig.

Dann ist $X_\sim^x / N_x$ unvollständig, insbesondere ist also X ein schlechter Nenner.

Beweis:

Sei $f: x \rightarrow X_0$ surjektiv (gemäß (1)).

Wir konstruieren durch Induktion nach $\alpha \in x$ $z_\alpha \in X_0$ mit

- (a) $\forall_{t \in \alpha} z_\alpha = z_t \in X_t$ (vergleiche 3.2 (3)),
- (b) $\exists_{t \leq \alpha+1} z_t = f(\alpha) \notin X_t$.

Damit ist $z \in H_e$ (Bedingung (a)) und nach 3.2(4) und Bedingung (b) ist $X_\sim^x / N_x$ unvollständig.

Zur Konstruktion:

$\alpha = 0$: Wähle $z_0 \in X_0$ beliebig.

$\alpha \in \text{LIM}$: Nach Voraussetzung ist $X_\sim^\alpha / N_\alpha$ vollständig. Wenden wir die Situation 3.1 und 3.2 (4) auf " α " statt " x " an, so folgt die Existenz von $z_\alpha \in X_0$, so daß (a) gilt. Daß auch (b) gilt, wird im Schritt $\alpha \rightarrow \alpha+1$ erreicht.

$\alpha \rightarrow \alpha+1$: Falls gilt $\forall_{t \leq \alpha} z_t = f(\alpha) \in X_t$,

so wähle $t \in X_\alpha \setminus X_{\alpha+1}$ (mittels 3.1 (4)) und setze $z_{\alpha+1} := t + f(\alpha)$.

Es ist für $t \leq \alpha+1$ $z_t = z_{\alpha+1} = z_t - f(\alpha) + t \in X_t + X_\alpha \subset X_t$ (also (a)), weiterhin ist $z_{\alpha+1} - f(\alpha) = t \notin X_{\alpha+1}$ (also (b)).

Sonst setze $z_{\alpha+1} := z_\alpha$. $\square$

Läßt man in Satz 3.3 für x eine beliebige Limesordinalzahl zu, und ersetzt die Voraussetzung (1) durch " $|X_0| \leq |x|$ ", so ist bereits $X^{|x|} / N_{|x|}$ unvollständig (eben wegen Satz 3.3). Also ist die Voraussetzung (2) nur erfüllbar, falls x eine Kardinalzahl ist.

3.4 Lemma

Sei $X := \mathbb{K}^{(\omega)}$ versehen mit einer vollständigen separierten Vektorraumtopologie t . Dann gilt $\omega_1 \leq \chi(X, t) \leq 2^{|\omega|}$.

Dabei sei $\chi(X, t)$ der Charakter von (X, t) , d.h. die minimale Mächtigkeit einer Nullumgebungsbasis von (X, t) .

Beweis:

(X, t) ist nicht metrisierbar (z.B. wegen dem Satz von Baire), also ist $\omega_1 \leq \chi(X, t)$. $Q^{(\omega)}$ ist dicht in (X, t) , somit ist $\chi(X, t) \leq 2^{|\omega|}$. $\square$

3.5 Satz

Es gelte CH.

Es sei t eine vollständige separierte Vektorraumtopologie auf $\mathbb{K}^{(\omega)}$, die feiner ist als die Topologie der koordinatenweisen Konvergenz t_{koor} und die eine Nullumgebungsbasis aus bezüglich t_{koor} abgeschlossenen Mengen besitzt.

Dann ist $(\mathbb{K}^{(\omega)}, t)$ ein schlechter Nenner.

Insbesondere ist unter CH φ ein schlechter Nenner.

In Abschnitt 6 werden wir sehen, daß jede vollständige separierte Vektorraumtopologie auf $\mathbb{K}^{(\omega)}$ einen schlechten Nenner ergibt, allerdings unter φ^* , d.h. unter noch stärkeren mengentheoretischen Voraussetzungen.

Leider ist mir nicht bekannt, ob in Satz 3.5 die Kontinuumshypothese notwendig ist, insbesondere ob φ bereits in ZFC ein schlechter Nenner ist. Um die Unabhängigkeit von ZFC zu zeigen, kann man nicht wie in Abschnitt 2 unter Verwendung von $\text{MA} + \neg\text{CH}$ argumentieren: φ hat unter MA den Charakter $2^{|\omega|}$, dadurch ist das Martin Axiom nicht (oder zumindest nicht analog zu Abschnitt 2) anwendbar. Man beachte jedoch, daß Modelle von ZFC existieren, in denen $\chi(\varphi) < 2^{|\omega|}$ gilt.

Nachzutragen ist, daß bereits ein Beispiel von Koethe [6] zeigt, daß auf $\mathbb{K}^{(\omega)}$ separierte vollständige lokalkonvexe Vektorraumtopologien existieren, die in ZFC einen schlechten Nenner ergeben und deren Topologie in der in Satz 3.5 geforderten Beziehung zur Topologie der koordinatenweisen Konvergenz stehen.

Beweis (zu 3.5):

Sei wegen 3.4 und CH $(U_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ eine Nullumgebungsbasis von l . Nach Voraussetzung ist U_α abgeschlossen bezüglich l_{koor} wählbar. Sei $l_0 := l_{\text{koor}}$ und sei für $0 < \alpha < \omega_1$ l_α die von l_0 und von $(U_\beta)_{\beta < \alpha}$ erzeugte Vektorraumtopologie auf $\mathbb{K}^{(\omega)}$. Für die vollständigen Hüllen X_α zu (X, l_α) folgt

$$X_0 \supset X_\alpha \supset X_\beta \supset X = \mathbb{K}^{(\omega)} \quad (\alpha < \beta < \omega_1).$$

Für $\alpha < \omega_1$ ist X_α metrisierbar, also ist nach 3.4 $X_\alpha \supsetneq X$. Wegen $\bigcap_{\alpha < \omega_1} X_\alpha = X$ existiert ein Teilsystem $(X_{\nu(\alpha)})_{\alpha < \omega_1}$, so daß $X_{\nu(\alpha)} \not\supset X_{\nu(\beta)}$ für alle $\alpha < \beta < \omega_1$ gilt. Für dieses Teilsystem ist die Situation 3.1 erfüllt. Wir wenden Satz 3.3 (mit $\kappa := \omega_1$) an. Voraussetzung (1) gilt dabei wegen CH und $X_0 = \mathbb{K}^{(\omega)}$. Voraussetzung (2) gilt, da N_α metrisierbar ist ($\alpha < \omega_1$). $\square$

3.6 Folgerung

Sei (X, l) ein unendlich dimensionaler topologischer Vektorraum. Es gelte $l > l_f$, dabei sei l_f die feinste lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf X . Es gelte CH.

Dann ist (X, l) ein schlechter Nenner.

Beweis:

φ ist komplementiert in (X, l) einbettbar, man vergleiche auch 0.5 (4). $\square$

3.7 Folgerung

Sei X eine unendliche lokalkonvexe direkte Summe aus nicht trivialen lokalkonvexen topologischen Vektorräumen. Es gelte CH.

Dann ist X ein schlechter Nenner.

Beweis:

φ ist komplementiert in X einbettbar. $\square$

Die oben gebrachten Folgerungen sollen nur exemplarisch zeigen, welche Konsequenzen die Tatsache hat, daß φ (unter CH) ein schlechter Nenner ist. Es existiert eine große Klasse von lokalkonvexen topologischen Vektorräumen, die φ als komplementierten Teilraum enthalten, und daher unter CH schlechte Nenner sind. Wir verweisen dazu insbesondere auf eine Arbeit von Saxon [11], so sind LF-Räume unter dieser Klasse, sowie die "meisten" überabzählbaren Produkte lokalkonvexer Räume.

4 Projektive Systeme

Während die vorangegangenen Abschnitte stets auf der Situation 1.1 aufbauten, und somit eine geeignete Hilfstopologie t_0 voraussetzten, wollen wir jetzt allgemeinere Fälle untersuchen. Hierzu stellen wir eine beliebige vollständige komTG auf natürliche Weise als projektiven Limes über einer Kardinalzahl als Indexmenge dar (siehe 4.4 und 4.5). An den Eigenschaften des projektiven Systems wollen wir ablesen, ob ein guter Nenner vorliegt. Dieser Abschnitt bringt hierzu die benötigten Hilfsaussagen (siehe insbesondere 4.12).

4.1 Definition

Sei κ LIM.

Sei für $\alpha < \kappa$ (X_α, t_α) eine separierte vollständige komTG (bzw. TVR). Sei für $\alpha < \beta < \kappa$ $k_{\alpha\beta} : X_\beta \rightarrow X_\alpha$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus (bzw. eine stetige lineare Abbildung) mit **dichtem** Bild, so daß $(X_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ bezüglich der Abbildungen $(k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa}$ ein projektives System und X_κ bezüglich der Abbildungen $(k_{\alpha\kappa})_{\alpha < \kappa}$ der zugehörige projektive Limes wird.

(Insbesondere ist $k_{\alpha\alpha} = \text{id}(\alpha < \kappa)$ und $k_{\alpha\beta} \circ k_{\beta\gamma} = k_{\alpha\gamma}$ ($\alpha < \beta < \gamma < \kappa$)).

Dann nennen wir

$((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$
ein projektives κ -System.

Man beachte, daß wir (abweichend von der üblichen Schreibweise) den projektiven Limes X_κ zum projektiven System dazunehmen.

4.2 Definition

Sei $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein projektives κ -System.

Gilt dann zusätzlich:

- (1) $\forall_{\alpha < \beta < \kappa} k_{\alpha\beta}$ ist surjektiv, so heißt das System "surjektiv".
- (2) $\forall_{\alpha < \beta < \kappa} k_{\alpha\beta}$ ist surjektiv und offen, so heißt das System "strikt".
- (3) $\forall_{\lambda \in \text{LIM} \cap \kappa} ((X_\alpha)_{\alpha < \lambda}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \lambda})$ ist ein projektives λ -System, so heißt das System "gesättigt".
- (4) $\forall_{\alpha < \kappa}$ existiert eine halbmétrisierbare Gruppentopologie auf $X_{\alpha+1}$, so daß die Topologie von $X_{\alpha+1}$ gleich dem Supremum zu dieser Topologie und zu der Initialtopologie zu $k_{\alpha, \alpha+1} : X_{\alpha+1} \rightarrow X_\alpha$ ist, so sprechen wir von einem projektivem κ -System "mit halbmétrisierbaren Schritten".

4.3 Bemerkung

Sei $((X_\alpha)_{\alpha \in \lambda}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \leq \lambda})$ ein projektives λ -System.

- (1) Ist $\forall_{\alpha \leq \beta \leq \lambda} k_{\alpha\beta}$ offen, so ist das System strikt.

Denn: Sei $\alpha > \beta > \lambda$, $x \in X_\alpha$. Dann hat $k_{\alpha\beta}$ dichtes Bild, es ist

$k_{\alpha\beta}(X_\beta) \cup U_0(X_\alpha)$ (da $k_{\alpha\beta}$ offen ist), also ist $x \in k_{\alpha\beta}(X_\beta) \cup k_{\alpha\beta}(X_\beta)$,
d.h. $k_{\alpha\beta}$ ist surjektiv.

- (2) Ist $\forall_{\alpha < \lambda} k_{\alpha\lambda}$ surjektiv, so ist das System surjektiv.

Ist $\forall_{\alpha < \lambda} k_{\alpha\lambda}$ offen, so ist das System strikt.

Denn: Die erste Aussage folgt aus $k_{\alpha\beta} \circ k_{\beta\lambda} = k_{\alpha\lambda}$ ($\alpha < \beta < \lambda$).

Bei der zweiten Aussage folgt zuerst wie in (1) die Surjektivität von $k_{\alpha\lambda}$ ($\alpha < \lambda$) und damit auch von $k_{\alpha\beta}$ ($\alpha < \beta < \lambda$). Sei nun $\alpha < \beta < \lambda$ und $U \subset U_0(X_\beta)$. Dann ist $k_{\beta\lambda}^{-1}(U) \subset U_0(X_\lambda)$. Da $k_{\alpha\lambda}$ offen ist und $k_{\beta\lambda}$ surjektiv ist, folgt $k_{\alpha\lambda} \circ k_{\beta\lambda}^{-1}(U) = k_{\alpha\beta}(U) \cup U_0(X_\lambda)$.

Für ein festes $\alpha < \lambda$ ist die Surjektivität von $k_{\alpha\lambda}$ äquivalent dazu, daß die Initialtopologie zu $k_{\alpha\lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\alpha$ eine vollständige Topologie auf X_λ ist. Also gilt:

Das System ist surjektiv $\Leftrightarrow$

Die Initialtopologie zu $k_{\alpha\lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\alpha$ ist für jedes $\alpha < \lambda$ eine vollständige Topologie auf X_λ .

Ebenso gilt:

Das System ist strikt $\Leftrightarrow$

Für jedes $\alpha < \lambda$ induziert $k_{\alpha\lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\alpha$ einen topologischen Isomorphismus $X_\lambda / \text{Kern } k_{\alpha\lambda} \xrightarrow{\sim} X_\alpha$.

- (3) Ist $\forall_{\alpha < \lambda} k_{\alpha, \alpha+1}$ surjektiv und ist das System gesättigt, so ist das System surjektiv, wie man leicht nachrechnet.

- (4) Ist $\forall_{\alpha < \lambda} k_{\alpha, \alpha+1}$ offen und ist das System gesättigt, so ist das System strikt.

Denn: Nach (3) ist das System surjektiv. Damit folgt für festes $\alpha < \lambda$ die Offenheit von $k_{\alpha\beta}$ ($\alpha < \beta < \lambda$) durch Induktion nach β .

- (5) Jedes projektives λ -System läßt sich "sättigen", d.h. zu einem geordneten gesättigten projektiven λ -System (gleiches λ) ergänzen.

Denn: Setze $\widehat{X}_0 := X_0$, $\widehat{X}_\lambda := X_\lambda$, für $\alpha < \lambda$, $\widehat{X}_{\alpha+1} := X_\alpha$ und für $\alpha \in \text{LIM} \cap \lambda$
 $\widehat{X}_\alpha := \varprojlim_{\beta < \alpha} X_\beta$.

Beim Sättigen gehen im Allgemeinen die Eigenschaften surjektiv und strikt verloren.

- (6) Ist $X = \prod_{i \in I} Y_i$ für vollständige separierte komTG Y_i ($i \in I$) und ist $\kappa := \|I\| \geq \omega$, so ist X ein strikter gesättigter projektiver κ -Limes. Genauer erhält man (nach Identifikation von I mit κ) vermöge $X_\alpha := \prod_{i \in \alpha} Y_i$ ein striktes gesättigtes projektives κ -System $(X_\alpha)_{\alpha \leq \kappa}$ mit $X = X_\kappa$ und $X_0 = \{0\}$. Sind weiter alle Y_i ($i \in I$) metrisierbar, so hat das System offensichtlich halbmétrisierbare Schritte.

4.4 Bemerkung - Definition

Sei (X, I) eine nicht diskrete vollständige separierte komTG und sei $\kappa := \chi(X, I)$. Dann existiert eine Familie von halbmétrisierbaren Gruppentopologien $\{f_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ auf X mit $I = \bigvee_{\alpha < \kappa} f_\alpha$. Sei für $\alpha < \kappa$ X_α die assoziiert separierte vollständige Hülle zu $(X, \bigvee_{i \in \alpha} f_i)$ und sei für $\alpha < \beta < \kappa$ $k_{\alpha\beta}: X_\beta \rightarrow X_\alpha$ die kanonische Verbindungsabbildung. Man erhält ein gesättigtes projektives κ -System mit $X = X_\kappa$ und $X_0 = \{0\}$.

Denn: Sei $\alpha < \kappa$, α LIM. Dann trägt X_α die Initialtopologie zu $k_{i,\alpha}: X_\alpha \rightarrow X_i$ ($i \in \alpha$). Aufgrund der Verträglichkeit der Abbildungen $k_{i',i}$ ($i < i' < \alpha$) und da X_α separiert ist, ist X_α in $\varprojlim_{i \in \alpha} X_i$ einbettbar.

Diese Einbettung hat dichtes Bild. Wegen der Vollständigkeit von X_α ist damit X_α (bis auf Isomorphie) der projektive Limes.

Wir wollen ein derartiges System, auch wenn es nicht eindeutig bestimmt ist, "kanonisch" zu X nennen.

Man kann leicht nachrechnen, daß das so definierte System halbmétrisierbare Schritte besitzt.

4.5 Bemerkung

Sei I eine gerichtete Indexmenge ohne maximalem Element. Sei $((X_\alpha)_{\alpha \in I}, (f_{\alpha\beta})_{\alpha, \beta \in I, \alpha < \beta})$ ein projektives System im üblichen Sinn und sei X der projektive Limes zu $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$. Es seien dabei X_α ($\alpha \in I$) und X vollständige, separierte komTG. Alle Verbindungsabbildungen mögen dichtes Bild haben. Weiterhin sei das System gesättigt, d.h.

Für jedes $J \in I$ mit J nicht konfinal in I existiere $\sup J \in I$ und es sei $X_{\sup J} = \varprojlim_{i \in J} X_i$.

Dann existiert eine wohlgeordnete konfinale Teilmenge $K \in I$, so daß K isomorph zu einer Limesordinalzahl κ ist und (nach Identifikation von K mit κ) $(X_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ (mit den zugehörigen Verbindungsabbildungen) ein gesättigtes projektives κ -System im Sinn von 4.1 und 4.2 darstellt. Man beachte, daß gilt:

$$\varprojlim_{\alpha < \kappa} X_\alpha \stackrel{\cong}{=} \varprojlim_{i \in I} X_i = X =: X_\kappa.$$

Der Beweis ist durch transfinit Konstruktion leicht zu führen:

$\alpha = 0$: Wähle $\alpha \in I$ beliebig und setze $\delta_0 := \alpha$.

$\alpha \rightarrow \alpha+1$: Da I kein maximales Element besitzt und gerichtet ist, existiert $\delta_{\alpha+1} \in I$ mit $\delta_\alpha < \delta_{\alpha+1}$.

$\alpha \text{ LIM}$: Entweder es ist $\{\delta_\beta : \beta < \alpha\}$ konfinal in I , dann setzen wir

$K := \{\delta_\beta : \beta < \alpha\}$ und sind fertig. Sonst existiert nach Voraussetzung ein $\delta_\alpha \in I$ mit $\delta_\alpha = \sup \{\delta_\beta : \beta < \alpha\}$.

Nach 0.16 ist

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha / \Delta_I X \text{ vollständig} \Leftrightarrow \prod_{\alpha \in \kappa} X_\alpha / \Delta_\kappa X \text{ vollständig}$$

Dieser Sachverhalt rechtfertigt, daß im folgenden nur gesättigte projektive κ -Systeme an Stelle von allgemeinen gesättigten Systemen (im obigen Sinn) betrachtet werden.

Motiviert durch 4.3, 4.4 und 4.5 betrachten wir die folgende (allgemeine) Situation:

4.6 Situation

Sei $\kappa \text{ LIM}$ und sei $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein gesättigtes projektives κ -System.

4.7 Schreibweisen

Es gelte Situation 4.6. Dann sei:

$X_\sim^\alpha := \prod_{t < \alpha} X_t$ ($\alpha < \kappa$), $\text{pr}_{\alpha\beta}: X_\sim^\beta \rightarrow X_\sim^\alpha$ die kanonische Projektion ($\alpha < \beta < \kappa$),

$\Delta^{\alpha\beta}: X_\sim^\beta \rightarrow X_\sim^\alpha$, $\Delta^{\alpha\beta}: (k_{t\beta})_{t < \alpha}: x \mapsto (k_{t\beta}(x))_{t < \alpha}$ ($\alpha < \beta + 1$, $\alpha, \beta < \kappa$),

$N_\alpha := \overline{\Delta^{\alpha\kappa}(X_\sim^\kappa)}$ ($\alpha < \kappa$),

$q_\alpha: X_\sim^\alpha \rightarrow X_\sim^\alpha / N_\alpha$ die Quotientenabbildung ($\alpha < \kappa$)

Weiter bezeichne $\widehat{\text{pr}}_{\alpha\beta}: X_\sim^\beta / N_\beta \rightarrow X_\sim^\alpha / N_\alpha$ ($\alpha < \beta < \kappa$) die durch das folgende Diagramm eindeutig bestimmte und stetige Abbildung:

$$\begin{array}{ccc} X_\sim^\beta & \xrightarrow{\text{pr}_{\alpha\beta}} & X_\sim^\alpha \\ \downarrow q_\beta & & \downarrow q_\alpha \\ X_\sim^\beta / N_\beta & \xrightarrow{\widehat{\text{pr}}_{\alpha\beta}} & X_\sim^\alpha / N_\alpha \end{array}$$

4.8 Lemma

Es gelte Situation 4.6 (und die Schreibweisen aus 4.7).

Dann gilt:

- (1) $\bigvee_{\alpha < \beta < \gamma < \kappa} \widehat{pr}_{\alpha\beta} \circ \widehat{pr}_{\beta\gamma} = \widehat{pr}_{\alpha\gamma}.$
- (2) $\bigvee_{\alpha < \beta < \kappa} N_\alpha = pr_{\alpha\beta}(N_\beta).$
- (3) $\bigvee_{\alpha < \kappa} \Delta^{\alpha+1, \alpha}: X_\alpha \xrightarrow{\circ} N_{\alpha+1}$ (eingeschränktes Ziel) ist ein topologischer Isomorphismus.
- (4) $\bigvee_{\alpha \in LIM, \alpha < \kappa} \Delta^{\alpha\alpha}: X_\alpha \xrightarrow{=} N_\alpha$ (eingeschränktes Ziel) ist ein topologischer Isomorphismus.
- (5) $\bigvee_{\alpha \in LIM, \alpha < \kappa} X_\alpha^\alpha / N_\alpha$ trägt die Initialtopologie zu
 $\widehat{pr}_{i\alpha}: X_\alpha^\alpha / N_\alpha \rightarrow X_i^i / N_i \quad (i < \alpha).$
- (6) $\bigvee_{\alpha < \kappa} X_{\alpha+1}^\alpha / N_{\alpha+1}$ ist vollständig.
- (7) $\bigvee_{\alpha < \kappa}$ Ist $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter in $X_\alpha^\alpha / N_\alpha$, so ist $\widehat{pr}_{\alpha\kappa}(\mathfrak{F})$ konvergent in $X_\alpha^\alpha / N_\alpha$.

Beweis:

(1), (2) und (3) sind offensichtlich, man beachte, daß $k_{\alpha\beta}$ dichtes Bild hat.

Zu (4): Gilt wegen $k_{\alpha\kappa}(X_\kappa)$ dicht in X_α und $X_\alpha = \varprojlim_{i < \alpha} X_i$.

Zu (5): Gilt, da die finale Bildung der Quotiententopologie mit der Initialbildung bei gerichteten Indexmengen vertauscht (vergleiche 1.8 (2)).

Zu (6): Gilt nach 0.17.

Zu (7): Zuerst ist nach 4.8 (6) $\widehat{pr}_{\alpha, \alpha+1}(\mathfrak{F})$ konvergent, damit ist $\widehat{pr}_{\alpha\kappa}(\mathfrak{F})$ konvergent, benutze hierzu 4.8 (1).0

4.9 Definition

Es gelte Situation 4.6. Dann sei

$$H := \{ (x_\alpha)_{\alpha < \kappa} \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha^\alpha : \bigvee_{\alpha < \beta < \kappa} pr_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha \in N_\alpha \}$$

sowie

$$\hat{H} := H / \prod_{\alpha < \kappa} N_\alpha.$$

4.10 Bemerkung (zu 4.9):

Offensichtlich ist $\prod_{\alpha < \kappa} N_\alpha \subset H$, also ist $\hat{H}$ wohldefiniert.

Es gilt $\hat{H} = \{ (x_\alpha)_{\alpha < \kappa} \in \prod_{\alpha < \kappa} X_\alpha^\alpha / N_\alpha : \bigvee_{\alpha < \beta < \kappa} \widehat{pr}_{\alpha\beta}(x_\alpha) = x_\beta \}.$

Man beachte hierzu das Diagramm in 4.7. Es ist, wie man leicht sieht, $\hat{H} = \varprojlim_{\alpha < \kappa} X_\alpha^\alpha / N_\alpha$ (bezüglich $\widehat{pr}_{\alpha\beta} \quad (\alpha < \beta < \kappa)$).

4.11 Satz

Es gelte Situation 4.6.

Sei $\hat{H}$ versehen mit der Relativtopologie zu $\prod_{\alpha \in X} X_{\alpha}^{\alpha}/N_{\alpha}$.

Sei $\hat{j} : X^{\infty}/N_X \rightarrow \hat{H}$, $x \mapsto (\widehat{pr}_{\alpha x}(x))_{\alpha \in X}$.

Dann gilt:

- (1) $\hat{H}$ ist eine vollständige separierte komTG.
- (2) $\hat{j}$ ist eine topologische Einbettung, insbesondere injektiv.
- (3) Bild $\hat{j}$ ist dicht in $\hat{H}$.
- (4) Insbesondere ist $\hat{H}$ eine vollständige Hülle zu X^{∞}/N_X .

Vor dem Beweis bringen wir die in den nächsten Abschnitten benötigte Folgerung:

4.12 Folgerung

Es gelte Situation 4.6. Dann sind äquivalent:

X^{∞}/N_X ist vollständig
und

$$(x_{\alpha})_{\alpha \in X} \in H \iff \exists z \in X^{\infty} \quad \forall \alpha \in X \quad pr_{\alpha x}(z) = x_{\alpha} \in N_{\alpha}$$

Man beachte, daß $N_X \cong X_X$ gilt (siehe 4.8 (4)). Mittels 0.5 liefert 4.12 ein Kriterium für die "Güte" eines Nenners X_X . Dieses Kriterium ist, bei einmal gegebenem projektivem System, wie in Abschnitt 1 ein rein algebraisches Kriterium, topologische Aspekte wurden eliminiert. (Für die algebraische Darstellung von N_{α} beachte 4.8 (3) und (4)).

Offensichtlich ist die in 4.12 angegebene Bedingung genau dann erfüllt, wenn sie für ein gesättigtes konfinales Teilsystem (mit entsprechendem "H") erfüllt ist, in Übereinstimmung mit 0.16. Der in 4.12 angegebene Ausdruck ist offensichtlich äquivalent zur Surjektivität der Abbildung $\hat{j}$, damit folgt 4.12 direkt aus 4.11.

Vermöge der Abbildung $\hat{j}$ aus 4.11 läßt sich der Limes eines Cauchyfilters $\mathfrak{F}$ in X^{∞}/N_X in $\hat{H}$ direkt angeben:

$$\lim \hat{j}(\mathfrak{F}) = (\lim \widehat{pr}_{\alpha x}(\mathfrak{F}))_{\alpha \in X}.$$

Man beachte hierzu 4.8 (7). Die Elemente von H bilden die Repräsentanten "typischer" Cauchynetze, 4.12 liefert ein Konvergenzkriterium für diese Cauchynetze.

Beweis (von 4.11):

Zu (1): Nach 4.10 ist $\hat{H} = \varinjlim_{\alpha \in X} X_{\sim}^{\alpha} / N_{\alpha}$, also auch $\hat{H} = \varinjlim X_{\sim}^{\alpha+1} / N_{\alpha+1}$.

Nach 4.8 (6) ist $X_{\sim}^{\alpha+1} / N_{\alpha+1}$ vollständig, also ist $\hat{H}$ vollständig.

Zu (2): Wegen 4.10 ist $\hat{j}$ wohldefiniert, wegen 4.8 (5) (mit $\alpha := x$) ist $\hat{j}$ eine Einbettung.

Zu (3): Sei $(x_{\alpha})_{\alpha \in X} \in \hat{H}$. Für $\alpha \in X$ wähle ein $y^{\alpha} \in X_{\sim}^x / N_x$, so daß $\widehat{pr}_{\alpha x}(y^{\alpha}) = x_{\alpha}$ gilt. Offensichtlich ist das Netz $(\hat{j}(y^{\alpha}))_{\alpha \in X}$ in $\hat{H}$ konvergent gegen $(x_{\alpha})_{\alpha \in X}$.

Zu (4): (4) ist eine direkte Folgerung aus (1), (2) und (3). $\square$

5 Surjektive gesättigte projektive κ -Systeme

In diesem Abschnitt werden wir die Folgerung 4.12 auf surjektive gesättigte projektive κ -Systeme (vgl. 4.1 und 4.2) anwenden. Wir zeigen, daß in diesem Fall " X_∞^κ/N_κ " vollständig ist (vgl. 4.7). Als wichtigstes Resultat dieses Abschnitts erhalten wir, daß die Klasse der (vollständigen separierten) guten Nenner abgeschlossen ist unter der Bildung surjektiver gesättigter projektiver κ -Limiten (siehe 5.2a). Weiter sind strikte gesättigte projektive κ -Limiten mit halbmetrisierbaren Schritten (beliebiger Räume) stets gute Nenner, sofern man bei einem guten Nenner startet (siehe 5.4). Ist die Topologie eines Raumes durch ein System von Halbmetriken gegeben, so bringen wir als weitere Folgerung ein hinreichendes Kriterium, daß ein guter Nenner vorliegt (siehe 5.5).

Wir bringen zunächst die Grundaussage dieses Abschnitts:

5.1 Satz

Sei $\kappa \text{ LIM}$ und $((X_\alpha)_{\alpha \in \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta \in \kappa})$ ein **surjektives gesättigtes projektives κ -System** (vgl. 4.1 und 4.2).
Dann ist X_∞^κ/N_κ vollständig (vgl. 4.7).

Man beachte, daß $N_\kappa \hat{=} X_\kappa$ gilt (siehe 4.8 (4)).

Beweis:

Wir benutzen 4.12. Sei also $(x_\alpha)_{\alpha \in \kappa} \in H$ (vgl. 4.9).

Wir definieren durch Induktion nach $\alpha \in \kappa$ $z_\alpha \in X_\infty^\kappa$, so daß gilt:

- (a) $\forall_{\iota < \alpha \in \kappa} \text{pr}_{\iota\alpha}(z_\alpha) = z_\iota$,
- (b) $\forall_{\alpha \in \kappa} z_\alpha - x_\alpha \in N_\alpha$.

Wegen (a) existiert damit eindeutig ein $\hat{z} \in X_\infty^\kappa$ mit $\text{pr}_{\alpha\kappa}(\hat{z}) = z_\alpha$ für alle $\alpha \in \kappa$. Damit liefert (b) mittels 4.12 die Behauptung.

Zur Konstruktion:

$\alpha = 0$: Setze $z_0 := \{-\}$ (die leere Familie).

$\alpha = 1$: Setze $z_1 := x_1$.

$\alpha+1 \rightarrow \alpha+2$: Wegen (b) ist $z_{\alpha+1} - x_{\alpha+1} \in N_{\alpha+1}$ und wegen $x \in H$ ist

$\text{pr}_{\alpha+1, \alpha+2}(x_{\alpha+2}) - x_{\alpha+1} \in N_{\alpha+1}$, also ist

$$\begin{aligned} z_{\alpha+1} - \text{pr}_{\alpha+1, \alpha+2}(x_{\alpha+2}) &\in N_{\alpha+1} = \Delta^{\alpha+1, \alpha}(X_{\alpha}). \quad (\text{nach 4.8 (3)}) \\ &= \Delta^{\alpha+1, \alpha}(k_{\alpha, \alpha+1}(X_{\alpha+1})) \quad (\text{da } k_{\alpha, \alpha+1} \text{ surjektiv ist}) \\ &= \text{pr}_{\alpha+1, \alpha+2}(\Delta^{\alpha+2, \alpha+1}(X_{\alpha+1})) \quad (\text{nach Definition 4.7}) \\ &= \text{pr}_{\alpha+1, \alpha+2}(N_{\alpha+2}). \quad (\text{nach 4.8 (3)}). \end{aligned}$$

(Dies ist nichts anderes, als daß die Surjektivität von $k_{\alpha, \alpha+1}$ äquivalent ist zur Surjektivität von $\text{pr}_{\alpha+1, \alpha+2}|N_{\alpha+2} : N_{\alpha+2} \rightarrow N_{\alpha+1}$).

Wir wählen $t \in N_{\alpha+2}$ mit $z_{\alpha+1} - \text{pr}_{\alpha+1, \alpha+2}(x_{\alpha+2}) = \text{pr}_{\alpha+1, \alpha+2}(t)$ und setzen $z_{\alpha+2} := x_{\alpha+2} + t$.

Damit folgt sofort (a) und (b).

$\alpha \rightarrow \alpha+1$ mit α LIM: Wieder ist $z_{\alpha} - \text{pr}_{\alpha, \alpha+1}(x_{\alpha+1}) \in N_{\alpha}$.

Es ist $N_{\alpha} = \Delta^{\alpha\alpha}(X_{\alpha})$ (nach 4.7 (3)), andererseits ist

$N_{\alpha+1} = \Delta^{\alpha+1, \alpha}(X_{\alpha})$ (nach 4.7 (3)). Also existiert ein $t \in N_{\alpha+1}$ mit

$z_{\alpha} - \text{pr}_{\alpha, \alpha+1}(x_{\alpha+1}) = \text{pr}_{\alpha, \alpha+1}(t)$ und man setzt wieder $z_{\alpha+1} := x_{\alpha+1} + t$.

Man beachte, daß hier die Surjektivität des Systems nicht ausgenutzt wird, diese Zeilen werden deutlicher, wenn man sich X_{α} als Teilraum von X_{∞}^{α} vorstellt. Wähle dann $s \in X_{\alpha}$ mit $z_{\alpha} - \text{pr}_{\alpha, \alpha+1}(x_{\alpha+1}) = s$ und setze $t := (s, s)$.

α LIM: Wegen (a) existiert eindeutig ein $z_{\alpha} \in X_{\infty}^{\alpha}$, so daß für alle $i < \alpha$ gilt

$\text{pr}_{i\alpha}(z_{\alpha}) = z_i$. Wegen (b) ist $\forall_{i < \alpha} \text{pr}_{i\alpha}(z_{\alpha}) - x_i \in N_i$ und wegen $x \in H$ ist

$\forall_{i < \alpha} \text{pr}_{i\alpha}(x_{\alpha}) - x_i \in N_i$. Betrachtet man die Abbildung $\hat{j}$ aus 4.11 (mit α statt ∞), so ist $\hat{j}(q_{\alpha}(z_{\alpha})) = \hat{j}(q_{\alpha}(x_{\alpha}))$. Nach 4.11 (2) ist $\hat{j}$ injektiv,

also folgt $z_{\alpha} - x_{\alpha} \in N_{\alpha}$, damit ist auch (b) erfüllt. $\square$

Die folgende Variante ist vor allem in Hinblick auf den nächsten Abschnitt interessant:

5.2 Folgerung

Sei $\kappa \in \text{LIM}$, $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein gesättigtes projektives κ -System.

- (1) Es existiere ein Club C in κ (vgl. 0.7) mit

$$\forall \alpha, \beta \in C, \alpha < \beta \quad k_{\alpha\beta} \text{ ist surjektiv}$$

Dann ist X_κ/N_κ vollständig.

- (2) Es existiere ein Club C und eine konfinale Menge D in κ , mit

$$\forall \alpha, \beta \in C, \alpha < \beta \quad k_{\alpha\beta} \text{ ist surjektiv und}$$

$$\forall \alpha \in D \quad X_\alpha \text{ ist ein guter Nenner.}$$

Dann ist X_κ ein guter Nenner.

Beweis:

Man beachte für (1), daß $((X_\alpha)_{\alpha \in \text{Co}(\kappa)}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa, \alpha, \beta \in \text{Co}(\kappa)})$ wieder ein gesättigtes projektives $\hat{\kappa}$ -System ist, mit $\hat{\kappa}$ der Ordnungstyp von C . Nach 4.3 (3) ist dieses System surjektiv, 5.1 und 0.16 liefern die Behauptung (1). (2) folgt aus (1), denn: Nach (1) ist X_κ/N_κ vollständig wegen 0.16 ist $\prod_{\alpha \in D} X_\alpha/N_\alpha$ vollständig. Mit 0.5 und $N_\kappa \cong X_\kappa$ (vgl. 4.8 (4)) folgt die Behauptung. $\square$

Insbesondere erhalten wir als Spezialfall von 5.2:

5.2a Folgerung

Sei $\kappa \in \text{LIM}$, $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein surjektives gesättigtes projektives κ -System.

Es sei für alle $\alpha < \kappa$ X_α ein guter Nenner.

Dann ist X_κ ein guter Nenner.

5.3 Folgerung

Sei X eine vollständige separierte komTG mit $\chi(X) = \omega_1$.

Sei $((X_\alpha)_{\alpha < \omega_1}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \omega_1})$ ein kanonisches projektives ω_1 -System zu X (vergleiche 4.4).

Es existiere ein Club C in ω_1 mit $\forall \alpha, \beta \in C, \alpha < \beta \quad k_{\alpha\beta} \text{ ist surjektiv.}$

Dann ist X ein guter Nenner.

Beweis:

Für $\alpha < \omega_1$ ist X_α metrisierbar, also ein guter Nenner. Damit folgt die Behauptung aus 5.2 (2). $\square$

Die Folgerung 5.3 legt zusammen mit 5.2 folgende Verallgemeinerung auf $\kappa := \chi(X) > \omega_1$ nahe:

Sei X eine vollständige separierte komTG mit $\kappa := \chi(X) > \omega_1$. Ein zugehöriges kanonisches projektives κ -System habe surjektive Verbindungsabbildungen. Dann ist X ein guter Nenner.

Man beachte, daß nach 4.4 das betrachtete κ -System halbmetrisierbare Schritte besitzt. Jedoch die auftretenden Räume X_α im Allgemeinen nicht mehr metrisierbar sind. Offen ist, ob diese Räume stets gute Nenner sind, und damit bleibt offen, ob obige Aussage wahr ist.

Man benötigt eine Aussage der folgenden Form:

Sei (X, t) eine vollständige separierte komTG, die ein guter Nenner ist, und sei f eine halbmetrisierbare Gruppentopologie auf X , so daß $(X, t \vee f)$ vollständig ist. Dann ist $(X, t \vee f)$ ebenfalls ein guter Nenner.

Ob dies gilt, ist mir nicht bekannt, selbst wenn man sich auf lokalkonvexe topologische Vektorräume beschränkt.

Die Reduktion der oben genannten Verallgemeinerung auf die zuletzt genannte Aussage verläuft wie folgt:

Sei $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein surjektives gesättigtes projektives κ -System mit halbmetrisierbaren Schritten und $X_0 = \{0\}$. Durch Induktion nach $\alpha < \kappa$ zeigen wir, daß X_α ein guter Nenner ist:

$\alpha = 0$: trivial.

$\alpha < \text{LIM}$: Gilt nach 5.2a.

$\alpha \rightarrow \alpha+1$: Sei t_α bzw. $t_{\alpha+1}$ die Topologie auf X_α bzw. $X_{\alpha+1}$. Dann existiert nach Voraussetzung (halbmetrisierbare Schritte) eine halbmetrisierbare Gruppentopologie $\hat{f}$ auf $X_{\alpha+1}$ mit $t_{\alpha+1} = k_{\alpha, \alpha+1}^{-1} (t_\alpha) \vee \hat{f}$. Sei r bzw. f die finale Gruppentopologie zu $t_{\alpha+1}$ bzw. $\hat{f}$ bezüglich $k_{\alpha, \alpha+1}$. Es ist Kern $k_{\alpha, \alpha+1}$ metrisierbar, also ist r eine vollständige separierte Topologie auf X_α . Weiterhin ist $r = t_\alpha \vee f$ und f ist halbmetrisierbar. Ist nun mit (X_α, t_α) auch (X_α, r) ein guter Nenner, so ist (wegen Kern $k_{\alpha, \alpha+1}$ metrisierbar) auch $(X_{\alpha+1}, t_{\alpha+1})$ ein guter Nenner, was zu zeigen war. $\square$

In Sonderfällen existiert jedoch die gewünschte Verallgemeinerung:

5.4 Satz

Sei $\kappa < \text{LIM}$. $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein **striktes** gesättigtes projektives κ -System.

Es sei X_0 ein guter Nenner und für alle $\alpha < \kappa$ sei Kern $k_{\alpha, \alpha+1}$ ein guter Nenner.

(Dies gilt insbesondere, falls $X_0 = \{0\}$ ist und ein striktes gesättigtes κ -System mit halbmetrisierbaren Schritten vorliegt).

Dann ist X_κ ein guter Nenner.

Beweis:

Induktiv folgt, daß X_α ($\alpha < \kappa$) ein guter Nenner ist. Für $\alpha \text{ LIM}$ benutzt man hierbei 5.2a, für $\alpha \rightarrow \alpha+1$ benutzt man 0.6, hier wird die Offenheit der Verbindungsabbildungen benötigt. $\square$

5.5 Satz

Sei (X, t) eine vollständige separierte komTG.

Sei $\mathcal{M}$ eine Familie von halbmetrisierbaren Gruppentopologien auf X

mit $t = \bigvee_{f \in \mathcal{M}} f$. Es gelte:

$\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ ($X, \bigvee_{f \in \mathcal{N}} f$) ist vollständig (i.A. nicht separiert).

Dann ist (X, t) ein guter Nenner.

Beweis

Sei $\kappa := |\mathcal{M}|$. Wir zeigen die Behauptung induktiv in κ

Für $\kappa < \omega$ ist die Behauptung richtig, da dann (X, t) metrisierbar ist

Sei also $\kappa \geq \omega$ und sei die Behauptung richtig für alle $\kappa' < \kappa$. Sei $f: \kappa \rightarrow \mathcal{M}$

bijektiv. Setze für $\alpha < \kappa$ $f_\alpha := \bigvee_{t < \alpha} f(t)$ und $(X, t_\alpha) := (X, f_\alpha) / \{0\}^{f_\alpha}$. Dann ist für alle $\alpha < \kappa$ (X_α, t_α) vollständig und separiert. Vermöge der kanonischen Verbindungsabbildungen erhalten wir ein surjektives gesättigtes projektives κ -System. Nach Satz 5.2a ist nur zu zeigen, daß für $\alpha < \kappa$ (X_α, t_α) ein guter Nenner ist. Nun wird für $\alpha < \kappa$ die Topologie von t_α von einer Familie geringerer Mächtigkeit von halbmetrisierbaren Gruppentopologien erzeugt, die wieder die in 5.5 geforderten Anforderungen erfüllt. Also folgt nach Induktionsannahme die Behauptung. $\square$

Man kann zeigen, daß 5.3 ein Spezialfall des Satzes 5.5 ist:

Dazu sei für $\alpha < C$ t_α die Initialtopologie zu $k_{\alpha \times \kappa}: X_\kappa \rightarrow X_\alpha$. Nach 5.3 (3) (angewandt auf das auf dem Club C definierte Teilsystem) ist $k_{\alpha \times \kappa}$ surjektiv, also ist t_α vollständig ($\alpha < C$). Weiterhin ist t_α halbmetrisierbar und es gilt $t = \bigvee_{\alpha < C} t_\alpha$. Sei also für die Anwendung von 5.5 $\mathcal{M} := \{t_\alpha: \alpha < C\}$. Sei nun $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$, dann existiert $N \subset C$ mit $\mathcal{N} = \{t_\alpha: \alpha \in N\}$. Ist $\sup N = \omega_1$, so ist $\sup \mathcal{N} = \sup \mathcal{M} = t$, sei also $\alpha := \sup N < \omega_1$, dann ist $\alpha < C$ und $t_\alpha = \sup\{t_\iota: \iota < \alpha, \iota \in N\}$, also ist $\sup \mathcal{N} = t_\alpha$, also vollständig. $\square$

5.6 Folgerung

Es sei (X, l) eine vollständige separierte komTG.

Sei $\mathfrak{M}$ eine Familie von vollständigen metrisierbaren Gruppentopologien auf X mit $l = \bigvee_{f \in \mathfrak{M}} f$.

Es existiere eine separierte Topologie l_0 auf X mit $l_0 \subset f$ für alle $f \in \mathfrak{M}$.
Dann ist (X, l) ein guter Nenner.

Beweis:

Die Topologie l_0 garantiert, daß $\mathfrak{M}$ die Anforderungen in 5.5 erfüllt.

Man beachte, daß 5.6 mit anderen Mitteln bereits in 1.11 gezeigt wurde.

Satz 5.5 läßt sich offensichtlich wie folgt verallgemeinern:

5.7 Satz

Sei (X, l) eine vollständige separierte komTG.

Sei $\mathfrak{M}$ eine Familie von Gruppentopologien auf X mit $l = \bigvee_{f \in \mathfrak{M}} f$.

Es gelte:

(a) $\bigvee_{f \in \mathfrak{M}} (X, \bigvee_{f \in \mathfrak{M}} f)$ ist vollständig
sowie

(b) $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ endlich $(X, \bigvee_{f \in \mathfrak{M}} f)$ ist ein guter Nenner.

Dann ist (X, l) ein guter Nenner.

Beweis:

Der Beweis von 5.7 verläuft wie in 5.5, die Voraussetzung (b) ergibt den Anfang der transfiniten Induktion nach $|\mathfrak{M}|$, d.h. den Fall $|\mathfrak{M}| \leq \aleph_0$.

Man beachte, daß die Voraussetzung (b) in 5.7 von fast metrisierbaren Gruppentopologien f erfüllt wird, vergleiche hierzu 0.22.

Andererseits sind fast metrisierbare komTG bereits nach 5.5 gute Nenner, man vergleiche hierzu 0.23.

Mittels 5.7 erhält man eine im wesentlichen 1.11 entsprechende Verallgemeinerung von 5.6.

Mit Hilfe von 5.7 kann man auch zeigen, daß in der Situation von 2.5 (X, l) ein guter Nenner ist.

5.8 Bemerkung

Wir betrachten folgende Klassen vollständiger separierter komTG:

- $\mathfrak{A}_1$ Die kleinste Klasse vollständiger separierter komTG, die die vollständigen metrisierbaren komTG enthält und abgeschlossen ist unter der Bildung von Limiten bezüglich surjektiver gesättigter projektiver κ -Systeme (κ -LIM).
- $\mathfrak{A}_2$ Die Klasse aller Limiten bezüglich strikter gesättigter projektiver κ -Systeme mit halbmétrisierbaren Schritten (wobei die Systeme bei $\{0\}$ starten).
- $\mathfrak{A}_3$ Die Klasse aller vollständigen separierten komTG, zu denen ein System von halbmétrisierbaren Gruppentopologien existiert, das die Anforderungen in 5.5 erfüllt.
- $\mathfrak{A}_4$ Die Klasse aller vollständigen separierten komTG, zu denen ein System von fast metrisierbaren Gruppentopologien existiert, das die Forderung 5.7 (a) erfüllt.

Alle vier Klassen sind nach den Ergebnissen dieses Abschnitts in der Klasse der guten Nenner enthalten.

Betrachtet man zu $X \in \mathfrak{A}_3$ das von dem System der Halbmetriken gebildete kanonische projektive System (im Sinn von 4.4), so sieht man leicht, daß $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{A}_1$ gilt.

$\mathfrak{A}_3$ enthält die Klasse der separierten vollständigen fast metrisierbaren komTG, wie 0.23 zeigt. Also enthält auch $\mathfrak{A}_1$ diese Räume. Analog zu $\mathfrak{A}_3 \subset \mathfrak{A}_1$ zeigt man damit, daß auch $\mathfrak{A}_4 \subset \mathfrak{A}_1$ gilt. Wir erhalten also $\mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_4 \supset \mathfrak{A}_3$.

Analysiert man den Beweis zu 0.23, so stellt man fest, daß auch $\mathfrak{A}_2$ die separierten vollständigen fast metrisierbaren komTG enthält. Dazu wähle man $\mathfrak{M}$ wie in 0.23 und betrachte das zu den Topologien aus $\mathfrak{M}$ gebildete kanonische projektive System. Nach 0.23 (vgl. auch 4.3 (2)) ist das System surjektiv. Die nach 4.3 (2) zur Striktheit äquivalente Aussage wird gerade im Beweis von 0.23 gezeigt.

Eine noch offene und sicher aufschlußreiche Frage ist, wie die in 5.8 eingeführten Klassen genau zueinander stehen, und welche Permanenzeigenschaften diese Klassen besitzen.

Jedenfalls gilt:

5.9 Bemerkung

Jede der vier in 5.8 eingeführten Klassen ist abgeschlossen unter der Bildung beliebiger Produkte.

Beweis (Skizze):

Für die Klassen $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ ist die Behauptung leicht ersichtlich. Für die Klasse $\mathfrak{A}_1$ ist die Behauptung offensichtlich, da Produkte surjektive projektive Systeme bilden.

Zu $\mathfrak{A}_2$: Es genügt, zu $\lambda \in \Lambda$ (mit Λ Kardinalzahl) strikte projektive κ -Systeme $(X_{\lambda,\alpha})_{\alpha < \kappa}$ mit $X_{\lambda,0} = \{0\}$ und mit halbmetrisierbaren Schritten zu betrachten (gleiches κ für alle λ). Man bilde dann

$$Y_0 := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_{\lambda,0}$$

sowie zu $Y_\tau = X_{0,\kappa} \times X_{1,\kappa} \times \dots \times X_{\lambda,\kappa} \times X_{\lambda+1,0} \times \dots$

$$Y_{\tau+1} := X_{0,\kappa} \times X_{1,\kappa} \times \dots \times X_{\lambda,\kappa+1} \times X_{\lambda+1,0} \times \dots$$

und im Limeschritt $Y_\tau := \varinjlim_{\tau' < \tau} Y_{\tau'}$.

Man rechnet leicht nach, daß das System $(Y_\tau)_\tau$ die geforderten Eigenschaften besitzt. $\square$

Von den Bemerkungen 5.8 und 5.9 wird im Folgenden kein Gebrauch gemacht, daher wurde auf einen ausführlichen Beweis verzichtet.

6 Nicht surjektive gesättigte projektive ω_1 -Systeme

In diesem Abschnitt untersuchen wir gesättigte projektive κ -Systeme mit nicht surjektiven Verbindungsabbildungen. Gewünscht ist die Aussage, daß die zugehörigen Limiten X_κ schlechte Nenner sind. Leider müssen wir uns auf ω_1 -Systeme beschränken und benötigen weitere "technische" Zusatzvoraussetzungen, vor allem an die Mächtigkeit der Räume des projektiven Systems. Daneben legen die Ergebnisse der Abschnitte 2 und 3 nahe, daß wir nicht ohne starke mengentheoretische Zusatzannahmen auskommen, wir werden ϕ^* (in einfachen Fällen genügt ϕ) benötigen, also stärkere Annahmen als CH und schwächere als $V=L$. Es gelang nicht, zu zeigen, daß genau diese Annahmen notwendig sind, insbesondere, daß CH nicht ausreicht. Jedoch folgt aus Abschnitt 2, daß ZFC sicher nicht ausreicht. Wir werden unter ϕ^* zeigen, daß in Folgerung 5.3 eine notwendige Beschreibung guter Nenner gegeben ist, sofern man sich auf topologische Vektorräume X_{ω_1} beschränkt und diese separabel sind (und den in 5.3 geforderten Charakter ω_1 besitzen) (siehe 6.5). Für separable kommutative topologische Gruppen bleibt allerdings eine kleine Lücke. Ob die Separabilitätsansforderung ersatzlos streichbar ist, und ob analoge Resultate auch für größere Kardinalzahlen κ (eventuell in $V=L$) erzielbar sind, bleibt offen. Parallel werden wir Aussagen formulieren, für die bereits das schwächere Axiom ϕ ausreicht.

Betrachtet man die Aussagen 5.2 und 5.3, so sieht man, daß man die Forderung "nicht surjektiv" sorgfältig präzisieren muß. Dies gibt Anlaß zu der folgenden Bemerkung:

6.1 Bemerkung

Sei $\kappa \in \text{LIM}$, $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein gesättigtes projektives κ -System.

(1) Sei C ein Club in κ , dann sind äquivalent:

(1 α) - $\forall \alpha \in C \quad \forall \beta: \alpha < \beta < \kappa \quad k_{\alpha\beta}$ ist surjektiv

(1 β) - $\forall \alpha, \beta \in C, \alpha < \beta \quad k_{\alpha\beta}$ ist surjektiv

(1 γ) - $\forall \alpha \in C \quad k_{\alpha\kappa}$ ist surjektiv

(2) Sei nun $\text{cf}(\kappa) > \omega$, dann sind äquivalent:

(2 α) - Es existiert ein Club C in κ , der die Bedingungen in (1) erfüllt.

(2 β) - Für jede stationäre Menge S in κ existiert ein $\alpha \in S$ mit:

$\forall \beta: \alpha < \beta < \kappa \quad k_{\alpha\beta}$ ist surjektiv

(2 γ) - Für jede stationäre Menge S in κ existiert ein $\alpha \in S$ mit:

$\forall \beta \in S: \alpha < \beta < \kappa \quad k_{\alpha\beta}$ ist surjektiv

(2 δ) - Für jede stationäre Menge S in κ existiert ein $\alpha \in S$ mit:

$k_{\alpha\kappa}$ ist surjektiv.

(3) Die Aussagen in (2) implizieren die folgende Aussage:

- Für jeden Club C in κ existiert ein $\alpha \in C$ mit:

$\forall \beta: \alpha < \beta < \kappa \quad k_{\alpha\beta}$ ist surjektiv.

Beweis:

Zu (1): Es gilt (1 α) $\Rightarrow$ (1 β) $\xrightarrow{4.3}$ (1 γ) $\Rightarrow$ (1 α).

Zu (2): Offensichtlich gilt (2 β) $\Leftrightarrow$ (2 γ).

Beachtet man (*) (siehe unten), so gilt (2 α) $\Leftrightarrow$ (2 β) mittels (1 α).

Ebenso gilt (2 α) $\Leftrightarrow$ (2 δ) mittels (1 γ).

Zu (3): Folgt trivialerweise aus (2 β).

Nachzutragen ist, daß folgender allgemeine Sachverhalt gilt:

(*) Sei $\Phi(\alpha)$ eine Aussage in einer Variablen, dann sind äquivalent:

Es existiert ein Club C mit $\Phi(\alpha)$ für alle $\alpha \in C$

und

Für jede stationäre Menge S existiert ein $\alpha \in S$ mit $\Phi(\alpha)$.

Denn:

" $\Rightarrow$ " Gilt nach Definition von "stationär".

" $\Leftarrow$ " Sei $T := \{\alpha < \kappa : \neg \Phi(\alpha)\}$. Dann ist T nicht stationär, also existiert ein Club C mit $C \cap T = \emptyset$. Also gilt für alle $\alpha \in C \quad \Phi(\alpha)$. $\square$

Wir werden folgende Sätze beweisen:

6.2 Satz

Sei $((X_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \omega_1})$ ein gesättigtes projektives ω_1 -System.
Es gelte:

(1) Es existiert eine stationäre Menge S in ω_1 mit:

$$\forall \alpha \in S \quad \exists \beta: \alpha < \beta < \kappa \quad |X_\alpha / k_{\alpha\beta}(X_\beta)| \geq \omega_1.$$

(2) $\forall \alpha \in \omega_1 \quad |X_\alpha| \leq 2^\omega.$

(3) $\forall \alpha \in \text{LIM} \cap \omega_1 \quad X_\alpha / N_\alpha$ ist vollständig.

Weiterhin gelte ϕ^* .

Dann ist $X^{\omega_1} / N_{\omega_1}$ unvollständig, insbesondere ist X_{ω_1} ein schlechter Nenner.

Zur Definition von ϕ^* siehe 0.9, zu X^α siehe 4.7.

6.3 Satz

Sei $((X_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \omega_1})$ ein gesättigtes projektives ω_1 -System.
Es gelte:

(1) Es existiert ein Club C in ω_1 mit:

$$\forall \alpha \in C \quad \exists \beta: \alpha < \beta < \kappa \quad k_{\alpha\beta} \text{ ist nicht surjektiv.}$$

(2) $\forall \alpha \in \omega_1 \quad |X_\alpha| \leq 2^\omega.$

(3) $\forall \alpha \in \text{LIM} \cap \omega_1 \quad X_\alpha / N_\alpha$ ist vollständig.

Weiterhin gelte ϕ .

Dann ist $X^{\omega_1} / N_{\omega_1}$ unvollständig, insbesondere ist X_{ω_1} ein schlechter Nenner.

Zur Definition von ϕ siehe 0.9.

6.4 Bemerkung

- (1) Sind X_α ($\alpha \in \omega_1$) algebraisch lineare Räume über $\mathbb{K}$ (und entsprechend $k_{\alpha\beta}$ ($\alpha < \beta \in \omega_1$) lineare Abbildungen), so ist die Voraussetzung (1) in 6.2 äquivalent zu:

Es existiert eine stationäre Menge S in ω_1 mit:

$$\forall \alpha \in S \quad k_{\alpha\alpha} \text{ ist nicht surjektiv.}$$

Beachte hierzu die $\mathbb{K}$ -Linearität der Verbindungsabbildungen und benutze 6.1 (2 β) $\Leftrightarrow$ (2 δ).

- (2) Voraussetzung (2) in 6.2 und 6.3 ist erfüllt, falls für alle $\alpha \in \omega_1$ X_α metrisierbar ist und einen Dichtetyp $< 2^{(\omega)}$ hat, insbesondere also, falls X_{ω_1} einen Dichtetyp $< 2^{(\omega)}$ hat (z.B. separabel ist) und X_α ($\alpha \in \omega_1$) metrisierbar ist.

Voraussetzung (2) ist ebenfalls erfüllt, falls für alle $\alpha \in \omega_1$ $X_\alpha \subset \mathbb{K}^{(\omega)}$ gilt.

- (3) Voraussetzung (3) in 6.2 und 6.3 ist wegen 4.8 (4) erfüllt, falls für alle $\alpha \in \text{LIM} \cap \omega_1$ X_α ein guter Nenner (z.B. metrisierbar) ist.
- (4) Insbesondere sind die Voraussetzungen (2) und (3) in 6.2 und 6.3 erfüllt, falls X_{ω_1} eine vollständige separierte komTG mit Dichtetyp $< 2^{(\omega)}$ ist, X_{ω_1} den Charakter ω_1 hat und das betrachtete System kanonisch im Sinn von 4.4 ist.

Zusammen mit 6.4 (1) und 6.4 (4) erhalten wir aus 6.2 und 5.3:

6.5 Satz

Sei (X, ι) ein vollständiger separierter topologischer Vektorraum mit Dichtetyp $< 2^{(\omega)}$ und Charakter $\chi(X) = \omega_1$. Sei ι_α ($\alpha \in \omega_1$) ein System von halbmétrisierbaren Vektorraumtopologien auf X mit $\iota = \bigvee_{\alpha \in \omega_1} \iota_\alpha$.

Es gelte ϕ^* .

Dann ist X genau dann ein guter Nenner, wenn gilt:

Es existiert ein Club C in ω_1 mit:

$$\forall \alpha \in C \quad (X, \bigvee_{\iota \in \alpha} \iota_\iota) \text{ ist vollständig.}$$

Man beachte, daß die gestellte Bedingung äquivalent dazu ist, daß das zugehörige projektive System (vgl. 4.4) auf einem Club surjektive Verbindungsabbildungen besitzt, man vergleiche auch 6.1 und 4.3 (2).

Beweis:

Sei $((X_\alpha)_{\alpha \leq \omega}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \leq \omega})$ das zu t_α ($\alpha < \omega_1$) konstruierte kanonische projektive ω_1 -System (vgl. 4.4).

1) Falls ein Club C existiert, so daß für alle $\alpha \in C$ $\bigvee_{\alpha \leq \beta < \omega_1} t_\beta$ vollständig ist, so ist nach Konstruktion der X_α $k_{\alpha\omega_1}$ surjektiv ($\alpha \in C$). Damit ist auch $k_{\alpha\beta}$ surjektiv ($\alpha \leq \beta, \alpha, \beta \in C$), also ist nach 5.3 X ein guter Nenner.

Falls kein Club existiert, der die geforderten Eigenschaften besitzt, so existiert für jeden Club C ein $\alpha \in C$, so daß $k_{\alpha\omega_1}$ nicht surjektiv ist. Nach 6.1 (2δ) existiert damit eine stationäre Menge S , so daß für alle $\alpha \in S$ $k_{\alpha\omega_1}$ nicht surjektiv ist. Damit ist nach 6.4 (1) die Voraussetzung (1) in 6.2 erfüllt. Die Voraussetzungen (2) und (3) in 6.2 sind nach 6.4 (4) erfüllt. Also ist nach 6.2 X kein guter Nenner. $\square$

Der Beweis der beiden Sätze 6.2 und 6.3 benutzt folgendes "Ausschluß und Fortsetzungslemma":

6.6 Lemma

Sei $\kappa \in \text{LIM}$, $((X_\alpha)_{\alpha \leq \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha \leq \beta \leq \kappa})$ ein gesättigtes projektives κ -System. Seien $\mu, N \in \text{LIM}$ mit $\mu \vee \kappa$ und sei $A \in X_\mu^\mu$. Es gelte:

- (a) $|A| \not\leq |X_\mu / k_{\mu\nu}(X_\nu)|$,
- (b) X_μ^μ / N_μ sei vollständig.

Sei weiter für $\alpha < \mu$ $x_\alpha \in X_\alpha^\alpha$ mit

- (c) $\alpha < \beta < \mu \Rightarrow \text{pr}_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha \in N_\alpha$.

Dann existiert ein $x_\mu \in X_\mu^\mu$, so daß gilt:

- (d) $\alpha < \beta \leq \mu \Rightarrow \text{pr}_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha \in N_\alpha$,
- (e) $(A - x_\mu) \cap \text{pr}_{\mu\nu}(N_\nu) = \emptyset$.

Man vergleiche (c) und (d) mit der Definition von H in 4.9.

Beweis:

Zuerst beachte man, daß wegen 4.8 (4) gilt:

- (a') $|N_\mu / \text{pr}_{\mu\nu}(N_\nu)| = |X_\mu / k_{\mu\nu}(X_\nu)| \not\leq |A|$.

Wendet man 4.12 auf " μ " statt " κ " an (und beachtet (b)), so erhält man ein $w \in X_\mu^\mu$ mit $\text{pr}_{\alpha\mu}(w) = x_\alpha \in N_\alpha$ ($\alpha < \mu$).

Nach (a') ist die Zahl der Nebenklassen in $N_\mu / \text{pr}_{\mu\nu}(N_\nu)$ größer als die Zahl der Elemente von A . Damit existiert ein $t \in N_\mu$ mit

$$\bigvee_{z \in A} z - (w+t) \notin \text{pr}_{\mu\nu}(N_\nu).$$

Wir setzen $x_\mu := w+t$. Dann folgt (e). Wegen $t \in N_\mu$ und nach Wahl von w folgt (d). $\square$

Wir müssen die benötigten Prinzipien ϕ^* und ϕ noch etwas aufbereiten:

6.7 Lemma

Sei C ein (fester) Club in ω_1 , dann gilt:

$$\phi \Leftrightarrow \text{Es existiert eine Familie } (x_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}, x_\alpha \in \alpha \ (\alpha \in \omega_1) \text{ mit}$$

$$\forall x \in \omega_1 \quad \alpha \in C, \alpha > \omega \quad x \cap \alpha = x_\alpha.$$

Beweis:

Die Richtung " $\Rightarrow$ " ist trivial (vgl. 0.9 (3)). Der Beweis zur Richtung " $\Leftarrow$ " kann mittels [1, Ch 3 Ex 3A] leicht geführt werden. Wir werden diese Richtung für den Beweis der Sätze 6.2 und 6.3 nicht verwenden, sie zeigt jedoch, daß wir "nichts verschenken". $\square$

6.8 Lemma

Sei für $\alpha \in \omega_1$, X_α eine beliebige Menge mit $2 \leq |X_\alpha| \leq 2^\omega$.

Dann gilt:

- (1) $\phi^* \Leftrightarrow$ Es existiert eine Familie $(A_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ mit $A_\alpha \subset \prod_{t \in \alpha} X_t$ und $|A_\alpha| < \omega$ ($\alpha \in \omega_1$), so daß gilt:

$$x \in \prod_{t \in \omega_1} X_t \quad C \text{ Club in } \omega_1 \quad \alpha \in C \quad (x_t)_{t \in \alpha} \in A_\alpha.$$

- (2) Für einen festen Club C in ω_1 gilt:

$$\phi \Leftrightarrow \text{Es existiert eine Familie } (z_\alpha)_{\alpha \in \omega_1} \text{ mit } z_\alpha \in \prod_{t \in \alpha} X_t,$$

so daß gilt:

$$x \in \prod_{t \in \omega_1} X_t \quad \alpha \in C, \alpha > \omega \quad (x_t)_{t \in \alpha} = z_\alpha.$$

In beiden Fällen gilt die Richtung " $\Rightarrow$ " offensichtlich auch für Familien $(X_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ mit $1 < |X_\alpha| \leq 2^\omega$ ($\alpha \in \omega_1$).

Beweis:

Zu (1) " $\Leftarrow$ ";

Ohne Einschränkung sei $\{0,1\} \in X_\alpha$ ($\alpha < \omega_1$), also ist die identische Abbildung $2^\alpha \rightarrow \prod_{t \in \omega_1} X_t$ ($\alpha < \omega_1$) wohldefiniert. Sei $(A_\alpha)_{\alpha < \omega}$ nach Voraussetzung gewählt. Wir setzen für $\alpha < \omega_1$ $S_\alpha := A_\alpha \cap 2^\alpha$. Sei nun $x \in 2^{\omega_1}$. Dann ist $x \in \prod_{t \in \omega_1} X_t$, also existiert ein Club C in ω_1 , so daß für alle $\alpha \in C$ $(x_t)_{t \in \alpha} \in A_\alpha$ gilt. Offensichtlich ist dann für alle $\alpha \in C$ $(x_t)_{t \in \alpha} \in S_\alpha$, und damit folgt ϕ^* .

Zu (1) " $\Rightarrow$ ";

Sei $\rho: \omega_1 \rightarrow \text{LIM}_{\omega_1}$ der Ordnungsisomorphismus. Für $\alpha < \omega_1$ existiert offensichtlich eine injektive Abbildung $g_\alpha: X_\alpha \rightarrow 2^{\{\rho(\alpha), \rho(\alpha+1)\}}$. Wir setzen für $\alpha < \omega_1$ $G_\alpha: \prod_{t \in \alpha} X_t \rightarrow 2^{\rho(\alpha)}$, $x \mapsto \bigcup_{t \in \alpha} g_t(x_t)$. Damit ist G_α injektiv. Sei nun $(S_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ gemäß ϕ^* . Für $\alpha < \omega_1$ setzen wir $A_\alpha := G_\alpha^{-1}[S_{\rho(\alpha)}]$. Sei nun $x \in \prod_{t \in \omega_1} X_t$. Mittels ϕ^* existiert zu $G_{\omega_1}(x) \in 2^{\omega_1}$ ein Club C in ω_1 mit $G_{\omega_1}(x) \cap \alpha \in S_\alpha$ für alle $\alpha \in C$. Wir setzen $\hat{C} := \rho^{-1}(C)$ und erhalten einen Club in ω_1 . Sei $\alpha \in \hat{C}$. Es ist dann $\rho(\alpha) \in C$, also ist $G_\alpha((x_t)_{t \in \alpha}) = G_{\omega_1}(x) \cap \rho(\alpha) \in S_{\rho(\alpha)}$. Damit folgt $(x_t)_{t \in \alpha} \in A_\alpha$ und somit die Behauptung.

Zu (2): Die Richtung " $\Leftarrow$ " folgt wie bei (1), wir zeigen " $\Rightarrow$ ";

Wie oben definieren wir ρ , g_α , G_α . Sei nun $(x_t)_{t \in \omega_1}$ gemäß 6.7 (mittels ϕ) zu $C := \{\rho(\alpha) : \alpha \in C, \alpha < \omega\}$ gewählt (C ist Club!). Für $\alpha < \omega_1$ sei $z_\alpha \in \prod_{t \in \alpha} X_t$ mit $G_\alpha(z_\alpha) = x_{\rho(\alpha)}$ (falls $x_{\rho(\alpha)}$ im Bild G_α) und sonst beliebig. Sei nun $y \in \prod_{t \in \omega_1} X_t$. Dann existiert zu $G_{\omega_1}(y) \in 2^{\omega_1}$ ein $\alpha \in C$ mit $G_{\omega_1}(y) \cap \alpha = x_\alpha$. Nun existiert zu $\hat{\alpha} \in C$, $\hat{\alpha} < \omega$ mit $\rho(\hat{\alpha}) = \alpha$. Damit ist

$$G_{\omega_1}(y) \cap \alpha = G_{\omega_1}(y) \cap \rho(\hat{\alpha}) = G_{\hat{\alpha}}((y_t)_{t \in \hat{\alpha}}) = x_\alpha,$$

also ist $(y_t)_{t \in \hat{\alpha}} = z_{\hat{\alpha}}$. $\square$

Jetzt können wir die beiden Sätze beweisen:

Beweis (zu Satz 6.2):

1) Sei S gemäß Voraussetzung (1) in 6.2 gewählt, hierbei können wir ohne Einschränkung $S \in \text{LIM}$ annehmen. Induktiv in $\alpha < \omega_1$ definieren wir μ_α und ν_α mit:

$$\mu_\alpha \in S, \nu_\alpha \in \text{LIM} \cap \omega_1, \mu_\alpha \in \nu_\alpha \in \mu_{\alpha+1} \text{ und } |X_{\mu_\alpha}/k_{\mu_\alpha \nu_\alpha}(X_{\nu_\alpha})| \geq \omega_1.$$

Dazu setzen wir $\mu_\alpha := \min\{\beta \in S: \forall_{\iota < \alpha} \nu_\iota \in \beta\}$ und wählen dann ν_α wie gefordert.

2) Wir zeigen, daß $S_1 := \{\mu_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ stationär in ω_1 ist.

Dazu betrachten wir $C_1 := \{\alpha < \omega_1: \forall_{\iota < \alpha} \nu_\iota \in \alpha\}$. Aus 0.10 (1) folgt, daß C_1 ein Club in ω_1 ist. S_1 ist stationär, falls wir gezeigt haben, daß $S_1 \cap S \cap C_1$ gilt. Sei also $\alpha \in S \cap C_1$. Dann ist $\sup_{\iota < \alpha} \nu_\iota < \alpha$. Nun ist ν streng monoton wachsend, also ist $\sup_{\iota < \alpha} \nu_\iota = \alpha$. Wegen $\alpha \in S$ ist nach Konstruktion $\mu_\alpha = \alpha$, also $\alpha \in S_1$.

3) Sei nun gemäß 6.8 (1) die Familie $(A_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ zu $(X_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ gewählt, hier geht die Voraussetzung (2) ein. Wir definieren induktiv in $\alpha < \omega_1$ $x_\alpha \in X_\alpha$ mit:

$$(a) \quad \alpha \in \beta \in \omega_1 \quad \text{pr}_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha \in N_\alpha,$$

$$(b) \quad \forall_{\alpha < \omega_1} (A_{\mu_\alpha} - x_{\mu_\alpha}) \cap \text{pr}_{\mu_\alpha \nu_\alpha}(N_{\nu_\alpha}) = \emptyset.$$

Für $\alpha = 0$ sei dazu $x_0 := (-)$ die leere Familie.

Für $\alpha \rightarrow \alpha+1$ setze $x_{\alpha+1} := (x_\alpha, 0)$.

Sei jetzt $\alpha \in \text{LIM}$. Dann setze $\beta := \min\{\iota < \omega_1: \alpha \leq \nu_\iota\}$. Wir unterscheiden die Fälle:

$\alpha = \mu_\beta$: Dann wähle x_α gemäß 6.6 zu $(x_\iota)_{\iota < \alpha}$, μ_β , ν_β und A_α .

$\alpha \in \mu_\beta$: Dann wähle x_α gemäß 6.6 zu $(x_\iota)_{\iota < \alpha}$, $\mu := \alpha$, $\nu := \alpha + \omega$, $A := \emptyset$.

$\mu_\beta < \alpha \leq \nu_\beta$: Setze $x_\alpha := x_{\mu_\beta}$, fortgesetzt mit 0.

Damit erfüllt $(x_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ (a) und (b), insbesondere liegt $(x_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$ in H (mit H gemäß 4.9).

4) Wir nehmen an, daß $X_{\omega_1}^{\omega_1}/N_{\omega_1}$ vollständig ist. Nach 4.12 existiert dann ein $z \in X_{\omega_1}^{\omega_1}$ mit

$$(c) \quad \forall_{\alpha \in \omega_1} \text{pr}_{\alpha\omega_1}(z) = x_\alpha \in N_\alpha.$$

Zu z existiert nach 6.8 (1) ein Club C in ω_1 mit $\forall_{\alpha \in C} \text{pr}_{\alpha\omega_1}(z) \in A_\alpha$.

Nach Teil 2) ist S_1 stationär, also existiert ein $\alpha \in \omega_1$ mit $\mu_\alpha \in C$.

Damit ist $\text{pr}_{\mu_\alpha\omega_1}(z) \in A_{\mu_\alpha}$, gleichzeitig ist wegen (c) $\text{pr}_{\nu_\alpha\omega_1}(z) = x_{\nu_\alpha} \in N_{\nu_\alpha}$.

Die Konstruktion in Teil 3) garantiert, daß $\text{pr}_{\mu_\alpha\nu_\alpha}(x_{\nu_\alpha}) = x_{\mu_\alpha}$ gilt, also

ist $\text{pr}_{\mu_\alpha\omega_1}(z) = x_{\mu_\alpha} \in \text{pr}_{\mu_\alpha\nu_\alpha}(N_{\nu_\alpha})$ im Widerspruch zu (b). $\square$

Beweis (zu 6.3):

Der Beweis verläuft analog zum obigen Beweis.

1) Wir wählen C gemäß Voraussetzung (1) in 6.3 (1) und können dabei C LIM annehmen. Für die Konstruktion der Familien $(\mu_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ und $(\nu_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ wird jetzt " $k_{\mu_\alpha\nu_\alpha}$ nicht surjektiv" gefordert.

2) Offensichtlich ist $C_1 := \{\mu_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ ein Club in ω_1 .

3) Mittels 6.8 (2) wählen wir $z_\alpha \in X_{\omega_1}^\alpha(\alpha \in \omega_1)$ und setzen für $\alpha \in \omega_1$ $A_\alpha := \{z_\alpha\}$.

Wir beachten, daß gilt:

$$\forall_{\alpha \in \omega_1} |X_{\mu_\alpha}^{\mu_\alpha}/k_{\mu_\alpha\nu_\alpha}(X_{\nu_\alpha}^{\nu_\alpha})| \neq 1 = |A_{\mu_\alpha}|.$$

Damit kann eine zu Teil 3) des obigen Beweises analoge Konstruktion durchgeführt werden.

4) Unter der Annahme, daß $X_{\omega_1}^{\omega_1}/N_{\omega_1}$ vollständig ist, erhalten wir wieder ein $z \in X_{\omega_1}^{\omega_1}$ mit $\text{pr}_{\alpha\omega_1}(z) = x_\alpha \in N_\alpha$ für alle $\alpha \in \omega_1$. Mittels 6.8 (2) finden wir ein $\alpha \in \omega_1$ mit $\text{pr}_{\mu_\alpha\omega_1}(z) = z_{\mu_\alpha} \in A_{\mu_\alpha}$. Damit erhalten wir wieder den Widerspruch. $\square$

Als Anwendung von Satz 6.2 blicken wir auf Abschnitt 3 zurück:

6.9 Folgerung

Sei t eine vollständige separierte Vektorraumtopologie auf $\mathbb{K}^{(\omega)}$.
Es gelte ϕ^* . Dann ist $(\mathbb{K}^{(\omega)}, t)$ ein schlechter Nenner.

Beweis:

Wegen $\phi^* \Rightarrow CH$ und Lemma 3.4 existiert eine Familie $(t_\alpha)_{\alpha \in \omega_1}$ halbmetrisierbarer Vektorraumtopologien auf $\mathbb{K}^{(\omega)}$, die die Topologie t erzeugt. Dabei kann sogar t_α für jedes $\alpha \in \omega_1$ separiert gewählt werden. Offensichtlich ist für beliebiges $\alpha \in \omega_1$ $\bigvee_{t \in \alpha} t_t$ nicht vollständig, 6.4 liefert die Behauptung. $\square$

Auch die Situationen des Abschnitts 2 können wir unter dem jetzt gewonnenen Blickwinkel betrachten:

6.10 Satz

Es gelte Situation 2.2 (ohne (Vorl)). Es sei $|Z| < 2^n$. Für $\alpha \in \Omega_1$ sei Y_α metrisierbar (oder allgemeiner fast metrisierbar).

Es existiere ein Club C in ω_1 mit $\bigcap_{\alpha \in C \cap \Omega_1} Y_\alpha \neq Z^{(\omega)}$.

Dann ist unter der Annahme von ϕ^* X ein schlechter Nenner.

Man beachte, daß die in 2.8 geforderte Bedingung $Y_\alpha \neq Z^{(\omega)} \ (\alpha \in \Omega_1)$ impliziert.

Beweis:

Sei $v: \omega_1 \rightarrow \Omega_1$ der Ordnungsisomorphismus. Für $\alpha \in \omega_1$ sei $\hat{t}_\alpha$ die Initialtopologie zu $\text{pr}_{\eta_{v(\delta)}}(\delta \cdot \alpha)$ und $\hat{X}_\alpha$ die zugehörige assoziierte separierte vollständige Hülle. Wir setzen $I_\alpha := \bigcup_{\delta \in \alpha} \eta_{v(\delta)}(\omega)$. Man kann $\hat{X}_\alpha$ auf kanonische Weise als Teilraum von Z^{I_α} auffassen, denn:

$D_\alpha := \{x \in Z^{I_\alpha} : \forall_{\delta \in \alpha} (x|_{\eta_{v(\delta)}(n)})_{n \in \omega} \in Y_{v(\delta)}\}$ ist bezüglich der Initialtopologie zu den Projektionen $D_\alpha \rightarrow Y_{v(\delta)} \ (\delta \in \alpha)$ separiert und, wie man mittels der größeren koordinatenweisen Topologie leicht nachrechnet, vollständig. Der assoziierte separierte Raum zu $(X, \hat{t}_\alpha)$ ist offensichtlich kanonisch in D_α einbettbar, also auch seine vollständige Hülle $\hat{X}_\alpha$.

Versehen mit den kanonischen Verbindungsabbildungen $(k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta \in \omega_1}$ erhalten wir ein gesättigtes projektives ω_1 -System mit $X = \hat{X}_{\omega_1}$, man vergleiche die analoge Konstruktion in 4.4.

Wegen $\hat{X}_\alpha \subset Z^{I_\alpha}$ gilt für $\alpha \in \omega_1$ $|X_\alpha| < 2^{|\omega|}$, weiterhin ist für $\alpha \in \omega_1$ $\hat{X}_\alpha$ metrisierbar (bzw. fast metrisierbar, siehe 0.22). Vermöge $N_\alpha \cong \hat{X}_\alpha \ (\alpha \in \text{LIM} \cap \omega_1)$ (vergleiche 4.8 (4)) sind damit die Voraussetzungen (2) und (3) in 6.3 erfüllt.

Wir zeigen 6.3 (I) und sind dann wegen $X = X_{\omega_1} \cong N_{\omega_1}$ fertig.

Dazu zeigen wir zuerst, daß ein Club C in ω_1 existiert, so daß für alle $\alpha \in C$ gilt $\bigcup_{\delta < \alpha} \eta_{v(\delta)}[\omega] = v(\alpha)$:

Sei $f: \omega_1 \rightarrow \omega_1$ mit $f(\alpha) := \min(\omega_1 \setminus \bigcup_{\delta < \alpha} \eta_{v(\delta)}[\omega])$.

Wegen $\bigcup_{\delta < \alpha} \eta_{v(\delta)}[\omega] \subset \bigcup_{\delta < \alpha} v(\delta) \subset v(\alpha)$ ist $\forall \alpha \in \omega_1 \quad f(\alpha) > v(\alpha)$

Es ist $S := \{\alpha \in \Omega_1: f(v^{-1}(\alpha)) < \alpha\}$ nicht stationär in ω_1 :

Denn sonst existiert nach 0.10 (2) ein $S' \subset S$ stationär und $\alpha_0 \in \omega_1$ mit $f(v^{-1}(\alpha)) = \alpha_0 \ (\alpha \in S')$. Dann ist für alle $\alpha \in S' \quad \alpha_0 \neq \bigcup_{\delta \in v^{-1}(\alpha)} \eta_{v(\delta)}[\omega]$.
Nun ist $v^{-1}(S')$ konfinal in ω_1 , also folgt $\alpha_0 \neq \bigcup_{\delta \in \omega_1} \eta_{v(\delta)}[\omega] = \omega_1$,
der gesuchte Widerspruch.

Damit existiert ein Club C in ω_1 mit $C \cap S = \emptyset$. Sei ohne Einschränkung $C \subset \Omega_1$. Damit ist für alle $\alpha \in C \quad f(v^{-1}(\alpha)) > \alpha$, also für alle $\alpha \in v^{-1}(C) \quad \bigcup_{\delta < \alpha} \eta_{v(\delta)}[\omega] = v(\alpha)$. $v^{-1}(C)$ ist der gesuchte Club.

Nach Voraussetzung (und 0.10 a) existiert dann auch ein Club C mit

(a) $\bigcup_{\delta < \alpha} \eta_{v(\delta)}[\omega] = v(\alpha)$ und (b) $Y_{v(\alpha)} \neq Z^{(\omega)} \ (\alpha \in C)$.

Sei nun $\alpha \in C$. Wir zeigen, daß $k_{\alpha, \alpha+1}: X_{\alpha+1} \rightarrow X_\alpha$ nicht surjektiv ist:

Zuerst ist wegen (a) $I_\alpha = v(\alpha) = I_{\alpha+1}$, damit ist $\hat{X}_\alpha, \hat{X}_{\alpha+1} \subset Z^{v(\alpha)}$, d.h. $k_{\alpha, \alpha+1}$ ist die Identität.

Bettet man $Z^{\eta_{v(\alpha)}[\omega]}$ in $Z^{v(\alpha)}$ ein (vermittelt durch $\eta_{v(\alpha)}$), so ist wegen (b) und $\hat{X}_{\alpha+1} \subset D_{\alpha+1}^{\alpha+1}$ (siehe oben) $Z^{\eta_{v(\alpha)}[\omega]} \not\subset \hat{X}_{\alpha+1}$.

Andererseits ist $Z^{\eta_{v(\alpha)}[\omega]} \subset \hat{X}_\alpha$, wie man leicht nachrechnet. $\square$

7 Ergänzungen

In diesem Abschnitt bringen wir ergänzende Aussagen über gesättigte projektive κ -Systeme. Zuerst untersuchen wir, ob die Aussagen in den Abschnitten 5 und 6 von der Wahl des projektiven κ -Systems abhängen. Leider müssen wir uns hierbei auf reguläre Kardinalzahlen κ beschränken, und auch weitere Zusatzvoraussetzungen fordern. Ob diese Voraussetzungen streichbar sind, bleibt offen. Wir erhalten insbesondere (unter gewissen Voraussetzungen) eine notwendige und hinreichende Bedingung, wann der Limes eines projektiven κ -Systems als Produkt darstellbar metrisierbarer komTG darstellbar ist.

Dieses Resultat gibt Anlaß zu einem Beispiel für einen vollständigen separierten LKR, der guter Nenner ist, jedoch kein Produkt metrisierbarer komTG (alles in ZFC!).

Daneben bringen wir einen direkten Beweis dafür, daß strikte gesättigte projektive κ -Systeme mit halbmetrisierbaren Schritten gute Nenner ergeben, ohne daß wir Wigners Aussage (daß Produkte metrisierbarer Räume gute Nenner sind, sowie 0.4) benutzen. Insbesondere erhalten wir einen Alternativbeweis zu Wigner. Als Nebenresultat erhalten wir, daß die Three Space Aussage für gute Nenner ein gewisses Analogon für surjektive gesättigte projektive κ -Systeme hat.

7.1 Lemma

Sei κ LIM, $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein projektives κ -System.

Es gelte:

- (a) $\forall_{\alpha < \kappa} k_{\alpha, \alpha+1}$ ist kein topologischer Isomorphismus.

Dann ist $cf(\kappa) \leq \chi(X_\kappa)$.

Insbesondere gilt dann:

- (1) Ist κ eine reguläre Kardinalzahl und ist für alle $\alpha < \kappa$ $\chi(X_\alpha) < \kappa$, so ist $\chi(X_\kappa) = \kappa$.
- (2) Ist κ eine reguläre Kardinalzahl, ist das System gesättigt und hat es halbmetrisierbare Schritte und ist $\chi(X_0) < \kappa$, so ist $\chi(X_\kappa) = \kappa$.

Beweis:

Sei $\lambda := \chi(X_\kappa)$. Ist $cf(\kappa) > \lambda$, so existiert offensichtlich ein $\alpha < \kappa$, so daß X_α die Initialtopologie zu $k_{\alpha\kappa}: X_\alpha \rightarrow X_\kappa$ trägt. Da X_α ($\alpha < \kappa$) separiert und vollständig ist, und da $k_{\alpha\kappa}$ dichtes Bild hat, folgt der Widerspruch zu Voraussetzung (a). Die Behauptungen (1) und (2) folgen dann direkt. □

Das erste Lemma zeigt, daß, wenn X Limes eines projektiven κ -Systems und eines projektiven λ -Systems ist, κ und λ gleich sind, sofern κ und λ reguläre Kardinalzahlen sind und wir die in 7.1 genannten naheliegenden Zusatzannahmen treffen.

7.2 Lemma

Sei $\kappa \geq \omega_1$ eine reguläre Kardinalzahl.

Seien $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ und $((Y_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (l_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ gesättigte projektive κ -Systeme. Es sei für alle $\alpha < \kappa$ $\chi(X_\alpha) < \kappa$ und $\chi(Y_\alpha) < \kappa$.

Es existiere ein topologischer Isomorphismus

$$j_\kappa : X_\kappa \xrightarrow{\cong} Y_\kappa.$$

Dann existiert ein Club C in κ und für alle $\alpha \in C$ existieren topologische Isomorphismen $j_\alpha : X_\alpha \xrightarrow{\cong} Y_\alpha$, so daß für alle $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in C$ gilt das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X_\beta & \xrightarrow{j_\beta} & Y_\beta \\ \downarrow k_{\alpha\beta} & & \downarrow l_{\alpha\beta} \\ X_\alpha & \xrightarrow{j_\alpha} & Y_\alpha \end{array}$$

Beweis:

Der Beweis benutzt das Löwenheim-Skolem Theorem (siehe 0.10 (I)).

Sei dazu für $\alpha < \kappa$:

t_α die von $k_{\alpha\kappa} : X_\kappa \rightarrow X_\alpha$ auf X_α induzierte Topologie.

f_α die von $l_{\alpha\kappa} : Y_\kappa \rightarrow Y_\alpha$ auf Y_α induzierte Topologie.

Dann ist für $\alpha < \kappa$

$$f(\alpha) := \min\{\beta < \kappa : t_\alpha \subset f_\beta \text{ und } f_\alpha \subset t_\beta\}$$

wohldefiniert, hier geht $\chi(X_\alpha) < \kappa$, $\chi(Y_\alpha) < \kappa$ und κ regulär ein.

Nach 0.10 (I) ist

$$C_1 := \{\alpha < \kappa : \forall t_\alpha \ f(t) \subset \alpha\}$$

ein Club in κ , also auch $C := C_1 \cap \text{LIM}$. Sei $\alpha \in C$, dann ist $\bigvee_{t < \alpha} t_t = \bigvee_{t < \alpha} f_t$.

Es ist $\alpha \in \text{LIM}$, die beiden Systeme sind gesättigt, es folgt $t_\alpha = f_\alpha$. Da alle betrachteten Räume separiert und vollständig sind, und da die Verbindungsabbildungen $k_{\alpha\kappa}$ und $l_{\alpha\kappa}$ dichtes Bild haben, folgt die Behauptung. (I)

7.3 Lemma

Sei $\kappa \geq \omega_1$ eine reguläre Kardinalzahl und sei $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein gesättigtes projektives κ -System. Es sei für alle $\alpha < \kappa$ $\chi(X_\alpha) < \kappa$. Es sei 7.1 (a) erfüllt.

Dann sind äquivalent:

Es existiert ein Club C in κ , so daß für alle $\alpha \in C$ $k_{\alpha\kappa}$ offen und insbesondere surjektiv ist und für alle $\alpha, \beta \in C$, $\alpha < \beta$ Kern $k_{\alpha\beta}$ kompaktifiziert in X_β ist.

Und

Es existiert eine Familie $(Y_t)_{t \in I}$ mit $Y_t \text{ kompTG}$ und $\chi(Y_t) < \kappa$ für $t \in I$, so daß $X_\kappa \cong \prod_{t \in I} Y_t$ gilt.

Beweis:

" $\Leftarrow$ ": Sei ohne Einschränkung Y_i nicht trivial ($\neq 1$). Wie in 4.3 (6) bilden die Teilprodukte ein striktes projektives III-System, die Kerne der Verbindungsabbildungen sind dabei offensichtlich komplementiert. 7.1 liefert $\text{III} = \chi = \chi(X_\chi)$. Damit liefert 7.2 die Behauptung.

" $\Rightarrow$ ": Man zeigt, daß $X_\chi \cong X_0 \times \prod_{\alpha \in C} \text{Kern } k_{\alpha, \alpha^+}$ gilt. Hierbei sei α^+ der

Nachfolger von α in C .

74 Bemerkung

(1) Lemma 7.2 zeigt, daß die in 5.3 geforderten Voraussetzungen unabhängig von der Wahl des kanonischen projektiven ω_i -Systems ist, entsprechend gilt in 6.5 für die Wahl der erzeugenden Halbmetriken. Auch in 5.2 liegt keine Abhängigkeit von der Wahl des projektiven χ -Systems (bei festgehaltenem Limes X_χ) vor, sofern die in 2.7 geforderten Voraussetzungen erfüllt sind. Dies ist weiterhin für die Sätze 6.2 und 6.3 festzustellen.

(2) Betrachtet man die Beispiele 2.10 (2) und 2.10 (3), so ist das dort betrachtete X (gemäß der in 6.10 durchgeführten Konstruktion) jeweils Limes eines nicht surjektiven gesättigten projektiven χ -Systems $(\hat{X}_\alpha)_{\alpha < \omega_1}$, dabei sind alle $\hat{X}_\alpha$ ($\alpha < \omega_1$) metrisierbar. Nach 7.3 ist X (in ZFC) kein Produkt metrisierbarer komTG.

Ebenso ist der in Beispiel 2.19 (1) bzw. 2.19 (2) konstruierte Raum X (in ZFC) kein Produkt metrisierbarer komTG.

7.5 Beispiel

Sei χ eine reguläre Kardinalzahl, $\chi < \omega_1$. Wir konstruieren einen vollständigen separierten LKR X mit Charakter χ , so daß X ein guter Nenner ist, jedoch kein Produkt metrisierbarer komTG (wobei X als komTG aufgefaßt wird). X erfüllt hierbei die in 5.5 gestellten Anforderungen. Weiterhin ist X ein striktes gesättigtes projektives χ -System $((X_\alpha)_{\alpha < \chi}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \chi})$, so daß $X_0 = \{0\}$ und Kern $k_{\alpha, \alpha+1}$ metrisierbar ist. Man vergleiche hierzu 5.4.

Für den Fall $\chi = \omega_1$ ist zusätzlich $|X_\alpha| = 2^{\omega_1}$ ($\alpha < \omega_1$) realisierbar, d.h. die Voraussetzungen (2) und (3) in 6.2 bzw. 6.3 sind realisierbar.

Zur Konstruktion des Beispiels:

1) Sei Z ein beliebiger Banachraum mit abgeschlossenem nicht komplementierbarem Teilraum Y . Für die im Fall $\kappa = \omega_1$ gestellte Zusatzanforderung sei $|Z| = 2^{(\omega)}$, z.B. $Z := c_0$.

Sei $q: Z \rightarrow Z/Y$ die Quotientenabbildung, Z/Y werde mit der von q induzierten Norm versehen.

Für eine beliebige Indexmenge I sei

$$l_2(I) := \left\{ (x_i)_{i \in I} \in (Z/Y)^I : (x_i)_{i \in I} \text{ ist } l_2\text{-summierbar} \right\}$$

versehen mit der von der l_2 -Norm induzierten Topologie.

Sei weiter

$$Z^{(I)} := \left\{ (x_i)_{i \in I} \in Z^I : (q(x_i))_{i \in I} \in l_2(I) \right\}$$

versehen mit der Supremumstopologie zur Spur der koordinatenweisen Topologie l_{koor} und der Initialtopologie zu

$$q^{(I)}: Z^{(I)} \rightarrow l_2(I), (x_i)_{i \in I} \mapsto (q(x_i))_{i \in I}.$$

Den gesuchten Raum erhalten wir durch

$$X := Z^{(\kappa)}.$$

2) Für beliebiges I ist $Z^{(I)}$ ein vollständiger separierter LKR, insbesondere gilt dies dann für den gesuchten Raum X .

Die Vollständigkeit sieht man dabei wie folgt:

Sei $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter in $Z^{(I)}$. Dann konvergiert $\mathfrak{F}$ koordinatenweise gegen ein $z \in Z^I$. Damit konvergiert auch $q^{(I)}(\mathfrak{F})$ koordinatenweise gegen $q^{(I)}(z)$. Gleichzeitig ist $q^{(I)}(\mathfrak{F})$ Cauchyfilter in $l_2(I)$, also ist $q^{(I)}(z) \in l_2(I)$ und $\mathfrak{F}$ konvergiert gegen z in $Z^{(I)}$.

3) Setzt man für $\alpha \leq \kappa$ $\downarrow_\alpha$ die von $q^{(\kappa)}$ und von $\text{pr}_\alpha: Z^{(\kappa)} \rightarrow Z, (x_i)_{i \in \kappa} \mapsto x_\alpha$ erzeugte Halbmetrik auf $Z^{(\kappa)}$, und $\mathfrak{M} := \{\downarrow_\alpha: \alpha \leq \kappa\}$, so ist offensichtlich die Forderung in 5.5 erfüllt:

Für $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$ ist $\bigvee_{\downarrow \in \mathfrak{M}} \downarrow$ eine vollständige Topologie auf X .

Insbesondere ist X ein guter Nenner.

4) Wir setzen für $\alpha \leq \kappa$:

$$X_\alpha := Z^{(\alpha)} \times l_2(\{\alpha, \kappa\})$$

und für $\alpha \leq \beta \leq \kappa$ die kanonischen Verbindungsabbildungen

$$k_{\alpha\beta}: X_\beta \rightarrow X_\alpha, (x_i)_{i \in \kappa} \mapsto ((x_i)_{i \in \alpha}, (q(x_i))_{i \in \{\alpha, \beta\}}, (x_i)_{i \in \{\beta, \kappa\}}).$$

Dann wird für $\alpha \leq \kappa$ die Topologie $\bigvee_{\downarrow \in \mathfrak{M}} \downarrow_\alpha$ (siehe 3)) von $k_{\alpha\kappa}: X_\kappa = Z^{(\kappa)} \rightarrow X_\alpha$ induziert. Somit ist $(X_\alpha)_{\alpha \leq \kappa}$ ein kanonisches gesättigtes projektives κ System zu X .

In Teil 5) werden wir insbesondere sehen, daß das System surjektiv ist und es halbmetrisierbare Schritte besitzt (vgl. 4.4). Insbesondere zeigt 7.1 (2), daß $\chi(X) = \kappa$ gilt.

5) Wir betrachten für $\alpha < \beta < \kappa$ das folgende (wohldefinierte) kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_\beta & \xrightarrow[\text{kan}]{\cong} & Z^{(\alpha)} & \times & Z^{([\alpha, \beta[)} & \times & I_2([\beta, \kappa[) \\
 \downarrow k_{\alpha\beta} & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow q^{([\alpha, \beta[)} & & \downarrow \text{Id} \\
 X_\beta & \xrightarrow[\text{kan}]{\cong} & Z^{(\alpha)} & \times & I_2([\alpha, \beta[) & \times & I_2([\beta, \kappa[)
 \end{array}$$

Damit folgt, daß $k_{\alpha\beta}$ stetig, offen und surjektiv ist. Also liegt ein striktes System vor. Weiterhin sieht man damit, daß Kern $k_{\alpha, \alpha+1} \cong Y$ gilt.

6) Ist $\kappa = \omega_1$ und $|Z| = 2^{(\omega)}$, so ist für $\alpha < \omega_1$ $|X_\alpha| = 2^{(\omega)}$, wie man leicht nachrechnet.

7) Wir zeigen, daß für alle $\alpha < \beta < \kappa$ Kern $k_{\alpha\beta}$ nicht komplementiert in X_β ist, dann folgt mittels 7.3, daß X kein Produkt von Räumen Y_μ (mit beliebiger Indexmenge) mit Charakter kleiner als κ ist.

Sei dazu zuerst $\alpha < \kappa$ und $\beta = \alpha+1$:

Aufgrund des Diagrammes in 5) und wegen $Z^{([\alpha, \alpha+1[)} = Z$ und $I_2([\alpha, \alpha+1[) = Z/Y$ ist Kern $k_{\alpha, \alpha+1} \xrightarrow[\text{kan}]{\cong} \{0\} \times Y \times \{0\}$.

Nach Lemma 7.5a (unten) ist damit Kern $k_{\alpha, \alpha+1}$ genau dann in $X_{\alpha+1}$ komplementiert, wenn Y in Z komplementiert ist.

Sei nun $\alpha < \beta < \kappa$ beliebig:

Wir nehmen an, daß L ein topologisches Komplement von Kern $k_{\alpha\beta}$ in X_β ist. Dann ist $L \xrightarrow{\sim} X_\beta / \text{Kern } k_{\alpha\beta} \xrightarrow{\sim} X_\alpha$ (da das System strikt ist), also ist $k_{\alpha\beta}|_L: L \xrightarrow{\sim} X_\alpha$ ein topologischer Isomorphismus. Setzen wir $L_1 := k_{\alpha+1, \beta}^{-1}(L)$, so erhalten wir das folgende kommutierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xrightarrow[\text{kan}]{\cong} & X_\alpha \\
 \downarrow k_{\alpha+1, \beta}|_L & \nearrow k_{\alpha, \alpha+1}|_{L_1} & \\
 L_1 & &
 \end{array}$$

Damit ist $k_{\alpha, \alpha+1}|_{L_1}: L_1 \rightarrow X_\alpha$ ein topologischer Isomorphismus, also ist L_1 ein topologisches Komplement zu Kern $k_{\alpha, \alpha+1}$ im Widerspruch zum soeben gezeigten. □

Wir tragen noch das folgende elementar beweisbare Lemma nach:

7.5a Lemma

Seien X und Y komTG. Sei L eine Untergruppe von X

Dann ist L genau dann in X komplementiert, wenn $L \times \{0\}$ in $X \times Y$ komplementiert ist.

Beweis:

Die Richtung " $\Rightarrow$ " ist klar, wir zeigen " $\Leftarrow$ ":

Sei M ein topologisches Komplement von $L \times \{0\}$ in $X \times Y$.

Sei $M_X := \{x \in X: (x, 0) \in M\}$. Trivialerweise ist $M_X \cap L = \{0\}$.

Es gilt $M_X + L = X$, denn:

Sei $x \in X$. Dann existiert ein $(a, b) \in M$, $(c, 0) \in L \times \{0\}$ mit $(x, 0) = (a, b) + (c, 0)$. Also ist $b = 0$, d.h. $a \in M_X$ und $x = a + c$.

Zu zeigen ist noch, daß $M_X \rightarrow X/L$, $x \mapsto x+L$ offen ist:

Sei $U \in \mathcal{U}_0(X)$. Dann ist $U \times Y \in \mathcal{U}_0(X \times Y)$. Damit existiert ein $V \in \mathcal{U}_0(Y)$,

$W \in \mathcal{U}_0(Y)$ mit $(U \times Y) \cap M + L \times \{0\} \supset V \times W \supset V \times \{0\}$. Damit gilt

$U \cap M_X + L \supset V$, was zu zeigen war. $\square$

Jetzt wenden wir uns surjektiven bzw. strikten gesättigten projektiven $\times$ -Systemen zu. Dabei werden wir abweichend von 4.1 auch projektive $\times$ Systeme betrachten, bei denen X_α ($\alpha \in \kappa$) nicht als vollständig vorausgesetzt werden. Wir werden diese Abweichung ein jedes Mal explizit hervorheben.

Im Fall nicht vollständiger X_α ($\alpha \in \kappa$) fordern wir für ein projektives $\times$ System nicht, daß X_κ der projektive Limes der X_α ($\alpha \in \kappa$) ist, sondern nur, daß X_κ die Initialtopologie zu $k_{\alpha\kappa}: X_\kappa \rightarrow X_\alpha$ ($\alpha \in \kappa$) trägt. Die Bezeichnungen in 4.2 übernehmen wir, dabei ist ein projektives $\times$ System (in dem hier betrachteten verallgemeinerten Sinn) gesättigt, falls für alle $\alpha \in \text{LIM} \times X_\alpha$ die Initialtopologie zu $k_{\alpha\kappa}: X_\kappa \rightarrow X_\alpha$ ($\alpha \in \kappa$) trägt.

Die hiermit eingeführten Begriffe stimmen für vollständige Räume X_α ($\alpha \in \kappa$) mit den Definitionen in 4.1 und 4.2 überein, denn:

Die Separiertheit von X_κ liefert eine injektive Einbettung von X_κ in den projektiven Limes der X_α ($\alpha \in \kappa$), diese Einbettung hat dichtes Bild, da $k_{\alpha\kappa}$ ($\alpha \in \kappa$) dichtes Bild hat. Für vollständiges X_κ ist also X_κ (bis auf Isomorphie) der projektive Limes.

Zunächst benötigen wir die folgende Vollständigkeitsaussage:

7.6 Lemma

Sei $\kappa \in \text{LIM}$, $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein striktes gesättigtes projektives κ -System aus separierten komTG X_α ($\alpha < \kappa$), die abweichend von Definition 4.1 nicht als vollständig vorausgesetzt werden. Für alle $\alpha < \kappa$ sei Kern $k_{\alpha, \alpha+1}$ ein guter Nenner.

Dann existiert zu jedem Cauchyfilter $\mathfrak{F}$ in X_0 ein Cauchyfilter $\mathfrak{G}$ in X_κ mit $k_{0\kappa}(\mathfrak{G}) \supset \mathfrak{F}$.

Insbesondere impliziert die Vollständigkeit von X_κ die Vollständigkeit von X_α für alle $\alpha < \kappa$.

Beweis:

Die Beweisidee wird [9, Theorem 11.22 oder Theorem 11.23] entnommen. Sei $\mathfrak{F}_0$ ein Cauchyfilter in X_0 . Wir definieren induktiv in $\alpha < \kappa$ einen Cauchyfilter $\mathfrak{F}_\alpha$ in X_α mit $k_{\alpha\alpha'}(\mathfrak{F}_\alpha) \supset \mathfrak{F}_\alpha$ ($\alpha < \alpha'$):

$\alpha \rightarrow \alpha+1$: Nach Voraussetzung ist Kern $k_{\alpha, \alpha+1}$ ein guter Nenner, also existiert nach 0.12 $\mathfrak{F}_{\alpha+1}$ wie gefordert.

$\alpha < \text{LIM}$: Offensichtlich ist $\bigcup_{\alpha < \kappa} k_{\alpha\alpha'}^{-1}(\mathfrak{F}_\alpha)$ Basis eines Cauchyfilters $\mathfrak{F}_\alpha$ in X_α .

7.7 Lemma

Sei $\kappa \in \text{LIM}$, $((N_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein surjektives gesättigtes projektives κ -System aus separierten komTG N_α ($\alpha < \kappa$), die abweichend von der Definition 4.1 nicht als vollständig vorausgesetzt werden. Sei $N_0 = \{0\}$.

Sei weiter X eine separierte komTG, so daß N_κ ein abgeschlossener Unterraum von X ist.

Dann existiert ein surjektives gesättigtes projektives κ -System $((X_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (l_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ aus separierten komTG X_α ($\alpha < \kappa$), wieder im allgemeinen nicht vollständig, so daß gilt:

- (1) $X_\kappa = X$, $X_0 = X/N_\kappa$ und $l_{0\kappa}: X \rightarrow X/N_\kappa$ ist die Quotientenabbildung.
- (2) Falls für ein $\alpha < \beta < \kappa$ $k_{\alpha\beta}$ offen ist, so auch $l_{\alpha\beta}$.
- (3) Für $\alpha < \kappa$ existiert ein topologischer Isomorphismus $j_\alpha: N_\alpha \rightarrow l_{\alpha\kappa}(N_\alpha)$, so daß für alle $\alpha < \beta < \kappa$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc}
 X/N_\kappa = X_0 & \xleftarrow{l_{0\alpha}} & X_\alpha & \xleftarrow{l_{\alpha\beta}} & X_\beta & \xleftarrow{l_{\beta\kappa}} & X_\kappa \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \{0\} = l_{0\kappa}(N_\kappa) & & l_{\alpha\kappa}(X_\kappa) & & l_{\beta\kappa}(X_\kappa) & & N_\kappa \\
 \uparrow \text{Id} = j_0 \cong & & \uparrow j_\alpha \cong & & \uparrow j_\beta \cong & & \uparrow \text{Id} = j_\kappa \cong \\
 N_0 & \xleftarrow{k_{0\alpha}} & N_\alpha & \xleftarrow{k_{\alpha\beta}} & N_\beta & \xleftarrow{k_{\beta\kappa}} & N_\kappa
 \end{array}$$

- (5) Insbesondere ist für alle $\alpha < \beta < \kappa$ Kern $k_{\alpha\beta} \cong \text{Kern } l_{\alpha\beta}$.

Beweis:

1) Sei $q: X \rightarrow X/N_\alpha$ die Quotientenabbildung, t_X die Topologie auf X und t_α die Topologie auf N_α ($\alpha \leq \kappa$). Für $\alpha < \kappa$ sei

$$(a) \quad \mathcal{B}_\alpha := \mathcal{U}_0(X) + k_{\alpha\kappa}^{-1}(\mathcal{U}_0(N_\alpha)).$$

$\mathcal{B}_\alpha$ bildet die Nullumgebungsbasis einer Gruppentopologie f_α auf X . Da $t_\alpha = t_X|_{N_\alpha}$ gilt, ist $t_X = f_\kappa$, wegen $N_0 = \{0\}$ ist $f_0 = q^{-1}(q(t_X))$.

Benutzt man die Stetigkeit von $k_{\alpha\beta}$ ($\alpha < \beta < \kappa$), so folgt

$$(b) \quad t_X = f_\kappa \supset \dots \supset f_\beta \supset \dots \supset f_\alpha \supset \dots \supset f_0 = q^{-1}(q(t_X)) \quad (\alpha < \beta < \kappa).$$

Da das System $(N_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ gesättigt ist, gilt für $\alpha < \kappa$, $\alpha \text{ LIM}$

$$(c) \quad f_\alpha = \bigvee_{t < \alpha} f_t.$$

Für $\alpha < \kappa$ ist

$$(d) \quad f_\alpha|_{N_\alpha} = k_{\alpha\kappa}^{-1}(t_\alpha).$$

Denn: Für $U \in \mathcal{U}_0(X)$, $V \in \mathcal{U}_0(N_\alpha)$ gilt $(U + k_{\alpha\kappa}^{-1}(V)) \cap N_\alpha = U \cap N_\alpha + k_{\alpha\kappa}^{-1}(V)$, dies liefert mit der Stetigkeit von $k_{\alpha\kappa}$ das gewünschte.

Weiterhin ist für $\alpha < \kappa$

$$(e) \quad q(f_\alpha) = q(t_X).$$

Wir setzen für $\alpha < \kappa$:

$$(f) \quad X_\alpha := (X, f_\alpha) / \{0\}^{f_\alpha} \text{ und } l_{\alpha\beta}: X_\beta \rightarrow X_\alpha \quad (\alpha \leq \beta) \text{ kanonisch.}$$

Wir erhalten ein surjektives projektives κ -System (mit im allgemeinen nicht vollständigen X_α). Man beachte dazu die vor 7.6 angegebene verallgemeinerte Definition projektiver κ -Systeme in Verbindung mit (c). (c) liefert auch die Gesättigtheit des Systems.

2) Wegen $f_0 = q^{-1}(q(t_X))$ (siehe (b)) folgt (1).

Wegen (e) und da $q(t_X)$ separiert ist, gilt

$$(g) \quad \overline{\{0\}}^{f_\alpha} \subset N_\alpha \quad (\alpha < \kappa)$$

und damit sogar wegen (d)

$$(h) \quad \overline{\{0\}}^{f_\alpha} = \text{Kern } k_{\alpha\kappa} \quad (\alpha < \kappa).$$

Aus (g) folgt die Behauptung (3).

3) Weiter ist wegen (g) $j_\alpha: l_{\alpha\kappa}(N_\alpha) \rightarrow N_\alpha$, $x + \overline{\{0\}}^{f_\alpha} \rightarrow k_{\alpha\kappa}(x)$ (mit $x \in N_\alpha$) wohldefiniert. $k_{\alpha\kappa}$ ist nach Voraussetzung surjektiv, also auch j_α . Nach (d) ist $f_\alpha|_{N_\alpha} = k_{\alpha\kappa}^{-1}(t_\alpha)$, somit ist j_α ein topologischer Isomorphismus.

Damit erhalten wir das kommutierende Diagramm in (4). Weiterhin erhalten wir wegen (3) und (4) durch Einschränkung von j_α den in (5) geforderten Isomorphismus.

4) Wir zeigen noch (2), sei dazu $\alpha < \beta < \kappa$ fest und $k_{\alpha\beta}$ offen. $l_{\alpha\beta}$ ist offen, falls für jedes $U \in \mathcal{U}_0(\{ \beta \})$ gilt:

$$l_{\alpha\beta}(U + \overline{\{0\}}^{f_\alpha}) \in \mathcal{U}_0(\{ \alpha \} / \overline{\{0\}}^{f_\alpha}),$$

also, falls für $U \in \mathcal{U}_0(\{ \beta \})$ gilt:

$$U + \overline{\{0\}}^{f_\alpha} \in \mathcal{U}_0(\{ \alpha \}).$$

Sei dazu nach (a) $\forall i \mathcal{U}_0(X), W \in \mathcal{U}_0(N_\beta)$.

Zu zeigen ist $V + k_{\beta\kappa}^{-1}(W) + \overline{\{0\}}^{f_\alpha} \in \mathcal{U}_0(\{ \alpha \})$, also genügt es zu zeigen, daß

$$k_{\beta\kappa}^{-1}(W) + \overline{\{0\}}^{f_\alpha} \in k_{\alpha\kappa}^{-1}(\mathcal{U}_0(N_\alpha)) \text{ gilt.}$$

Wegen (h) ist dies äquivalent zu $k_{\alpha\beta}(W) \in \mathcal{U}_0(N_\alpha)$, letzteres folgt aus der Offenheit von $k_{\alpha\beta}$. $\square$

Zusammenfassend stellen wir in 7.8 (siehe unten) fest, daß 7.7 zusammen mit 7.6 eine Beweisalternative für Satz 5.4 darstellt, die von Wigners Aussage [12, Theorem 3] keinen Gebrauch macht. Insbesondere erhalten wir einen Beweis dafür, daß Produkte guter Nenner (insbesondere also metrisierbarer komTG) wieder gute Nenner sind. Der hier vorgestellte Beweis geht in seiner Grundidee auf Roelcke [9, Theorem 11.22] zurück.

7.8 Folgerung

Sei κ LIM, $((N_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ ein **striktes** gesättigtes projektives κ -System. Sei N_0 ein guter Nenner und sei für $\alpha < \kappa$ Kern $k_{\alpha, \alpha+1}$ ein guter Nenner.

Sei X eine vollständige separierte komTG, so daß N_κ eine abgeschlossene Untergruppe von X ist.

Dann ist X/N_κ vollständig.

Beweis:

Durch "Verlängern" können wir ohne Einschränkung $N_0 = \{0\}$ annehmen. Wir konstruieren gemäß 7.7 ein striktes gesättigtes projektives κ -System $(X_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ (ohne zunächst die Vollständigkeit der X_α ($\alpha < \kappa$) zu erhalten). Dann ist jedoch nach 7.6 X_α ($\alpha < \kappa$) und insbesondere $X_0 = X/N_\kappa$ vollständig. $\square$

Betrachten wir nun nur surjektive, gesättigte projektive κ Systeme $(N_\alpha)_{\alpha > \kappa}$, so können wir zwar ebenfalls Lemma 7.7 anwenden, jedoch fehlt ein 7.6 entsprechendes Argument, das uns die Vollständigkeit der Räume X_α des konstruierten Systems $(X_\alpha)_{\alpha > \kappa}$ liefert. Wissen wir jedoch, daß X/N_κ vollständig ist, so erhalten wir ein surjektives System $(X_\alpha)_{\alpha > \kappa}$ aus vollständigen Räumen:

7.9 Lemma

Sei $\kappa \in \text{LIM}$, $((N_\alpha)_{\alpha > \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha > \beta > \kappa})$ ein surjektives (bzw. striktes) gesättigtes projektives κ -System mit $N_0 = \{0\}$. Weiter sei X eine separierte vollständige komTG, so daß N_κ eine abgeschlossene Untergruppe von X ist.

Es sei X/N_κ vollständig.

Dann gilt für das gemäß 7.7 konstruierte surjektive (bzw. strikte) gesättigte projektive κ -System $((X_\alpha)_{\alpha > \kappa}, (l_{\alpha\beta})_{\alpha > \beta > \kappa})$

$$X_\kappa = X, X_0 = X/N_\kappa, \quad \forall_{\alpha > \kappa} \quad \text{Kern } l_{\alpha, \alpha+1} \cong \text{Kern } k_{\alpha, \alpha+1}$$

und es ist für alle $\alpha > \kappa$ X_α vollständig.

Weiterhin gilt: Besitzt das System $(N_\alpha)_{\alpha > \kappa}$ halbmetrisierbare Schritte, so auch das System $(X_\alpha)_{\alpha > \kappa}$.

Beweis:

Sei $((X_\alpha)_{\alpha > \kappa}, (l_{\alpha\beta})_{\alpha > \beta > \kappa})$ gemäß 7.7 konstruiert. Nach Voraussetzung sind damit $X_0 = X/N_\kappa$ und $X_\kappa = X$ vollständig, wir benutzen dies und zeigen die Vollständigkeit der Räume X_α ($\alpha > \kappa$). Sei dazu $\alpha > \kappa$ fest. Sei $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter in X_α . Sei $\mathfrak{F}_0 := l_{0\alpha}(\mathfrak{F})$. $\mathfrak{F}_0$ ist Cauchyfilter in X_0 , also konvergent. Damit existiert ein konvergenter Filter $\mathfrak{G}$ in X_κ mit $l_{0\kappa}(\mathfrak{G}) \supset \mathfrak{F}_0$. Sei $\mathfrak{H} := \{F - l_{\alpha\kappa}(G) : F \in \mathfrak{F}, G \in \mathfrak{G}\}$. $\mathfrak{H}$ ist Basis eines Cauchyfilters in X_α .

Wir zeigen $\bigcap_{H \in \mathfrak{H}} H \cap l_{\alpha\kappa}(N_\kappa) \neq \emptyset$:

Sei dazu $F \in \mathfrak{F}$, $G \in \mathfrak{G}$. Damit ist $l_{0\kappa}(G) \cap l_{0\alpha}(F) \neq \emptyset$. Somit existiert ein $g \in G$, $f \in F$ mit $l_{\alpha\kappa}(g) - f \in \text{Kern } l_{0\alpha} \subset l_{\alpha\kappa}(N_\kappa)$.

Also ist $\mathfrak{H}_1|_{l_{\alpha\kappa}(N_\kappa)}$ Basis eines Cauchyfilters, dieser ist wegen $l_{\alpha\kappa}(N_\kappa) \cong N_\alpha$ und N_α vollständig konvergent. Damit ist offensichtlich auch $\mathfrak{F}$ konvergent. Also ist X_α vollständig.

Damit gilt $X_\kappa = X$, $X_0 = X/N_\kappa$ (nach 7.7 (1)), $\text{Kern } l_{\alpha, \alpha+1} = \text{Kern } k_{\alpha, \alpha+1}$ ($\alpha > \kappa$) (nach 7.7 (3)). 7.7 (2) liefert die Striktheit des Systems, falls $(N_\alpha)_{\alpha > \kappa}$ strikt ist.

Es besitze nun das System $(N_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ halbmetrisierbare Schritte, wir zeigen, daß dann auch $(X_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ diese Eigenschaft besitzt:

Wir betrachten dazu die im Beweis zu 7.7 konstruierten Topologien f_α ($\alpha < \kappa$). Aufgrund der Definition der X_α ($\alpha < \kappa$) genügt es offensichtlich zu zeigen, daß für festes $\alpha < \kappa$ eine halbmetrisierbare Topologie r auf X existiert, so daß $f_{\alpha+1} = f_\alpha \vee r$ ist. Nun gilt nach Voraussetzung und wegen (d) im Beweis zu 7.7, daß auf N_κ eine halbmetrisierbare Gruppentopologie $\hat{r}$ existiert mit

$$f_{\alpha+1}|_{N_\kappa} = f_\alpha|_{N_\kappa} \vee \hat{r}.$$

Nun ist $f_{\alpha+1}|_{N_\kappa} \supset \hat{r}$, also existiert auf X eine halbmetrisierbare Gruppentopologie r mit $\hat{r} \subset r|_{N_\kappa}$ und $r \subset f_{\alpha+1}$. Somit gilt

$$f_{\alpha+1}|_{N_\kappa} = f_\alpha|_{N_\kappa} \vee r|_{N_\kappa} = (f_\alpha \vee r)|_{N_\kappa}.$$

Nach (e) im Beweis zu 7.7 gilt $q(f_\alpha) = q(t_X) = q(f_{\alpha+1})$, also auch

$q(f_\alpha \vee r) = q(f_{\alpha+1})$. Es ist $f_\alpha \vee r \subset f_{\alpha+1}$, also folgt nach 0.11, daß $f_\alpha \vee r = f_{\alpha+1}$ gilt, also die Behauptung. $\square$

Aus 7.9 erhalten wir eine "Three Space Aussage" für surjektive gesättigte projektive κ -Systeme:

7.10 Folgerung

Seien λ, κ LIM, $((Y_\alpha)_{\alpha < \lambda}, (h_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \lambda})$ und $((N_\alpha)_{\alpha < \kappa}, (k_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \kappa})$ surjektive (oder auch strikte) gesättigte projektive λ - bzw. κ -Systeme, es gelte $N_0 = \{0\}$.

Weiterhin sei X eine vollständige separierte komTG mit $N_\kappa \subset X$ und $X/N_\kappa = Y_\kappa$.

Dann existiert ein surjektives (bzw. striktes) gesättigtes projektives $(\lambda + \kappa)$ -System $((X_\alpha)_{\alpha < \lambda + \kappa}, (l_{\alpha\beta})_{\alpha < \beta < \lambda + \kappa})$, so daß gilt:

$$X_{\lambda + \kappa} = X, \quad \bigvee_{\alpha < \lambda} X_\alpha = Y_\alpha, \quad \bigvee_{\alpha < \kappa} \text{Kern } l_{\lambda + \alpha, \lambda + \alpha + 1} \stackrel{\sim}{=} \text{Kern } k_{\alpha, \alpha + 1}.$$

Sind weiterhin die Schritte der Systeme $(Y_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ und $(N_\alpha)_{\alpha < \kappa}$ halbmetrisierbar, so auch die Schritte des Systems $(X_\alpha)_{\alpha < \lambda + \kappa}$.

Beweis:

Wir beachten, daß nach Voraussetzung $X/N_\kappa = Y_\kappa$ vollständig ist, da ein projektives λ -System im Sinn von 4.1 vorliegt. Damit ist 7.9 anwendbar und wir erhalten durch "Aneinanderfügen" des Systems $(Y_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ und des in 7.9 erhaltenen Systems das geforderte System $(X_\alpha)_{\alpha < \lambda + \kappa}$. Mittels 7.9 erhalten wir die jeweils geforderten Eigenschaften. $\square$

Wir müssen leider darauf hinweisen, daß 7.10 zur Zeit noch keine Rückschlüsse auf die Klasse der guten Nenner zuläßt. Jedoch legt 7.10 die nach 5.3 angedeutete Verallgemeinerung nochmals nahe:

Jedes surjektive gesättigte projektive κ -System mit halbmetrisierbaren Schritten und $\{0\}$ als Startpunkt ergebe als Limes einen guten Nenner. Wie nach 5.3 festgestellt, fehlt für diese Aussage nur ein Beweis dafür, daß die Eigenschaft "guter Nenner" stabil ist unter der Verfeinerung mit einer halbmetrisierbaren Topologie.

Literatur

- [1] Devlin K.J.: Constructibility. Berlin, Springer 1984.
- [2] Devlin K.J., Shelah S.: A weak version of $\diamond$ which follows from $2^{(\aleph_0)} < 2^{(\aleph_1)}$. Israel J. of Math. 29, 239-247 (1978).
- [3] Eklof P.C.: Set theoretic methods in homological algebra and Abelian groups. Montréal, Pr. de l'Univ. de Montréal 1980.
- [4] Geller V. A., Kenderov P.S.: Completeness of a factor group. Vestnik Moskovskogo Univ. Mat. (5), 26, 32-33 (1971).
- [5] Köthe G.: Topologische lineare Räume I. Berlin, Springer 1966.
- [6] Köthe G.: Die Quotientenräume eines linearen vollkommenen Raumes. Math. Zeitschrift 51, 17-35 (1949).
- [7] Kunen K.: Set theory. Amsterdam, North Holland 1980.
- [8] Pasynkov B. A.: Almost metrizable topological groups. Soviet Math. Dokl. 6, 404-408 (1965).
- [9] Roelcke W., Dierolf S.: Uniform structures on topological groups and their quotients. New York, McGraw-Hill 1981.
- [10] Roelcke W.: Topologische Vektorräume I. München, Math. Inst. d. d. Univ. o. J. 1976.
- [11] Saxon S. A.: Nuclear and product spaces, Baire-like spaces, and the strongest locally convex topology. Math. Ann. 197, 87-106 (1972).
- [12] Wigner D.: Inverse limits and the completeness of quotient groups. Michigan Math. J. 22, 165-170 (1975).

Lebenslauf

Name	Friedrich Christian Schmerbeck
Geburtsdatum	28.03.1955
Geburtsort	Geisenfeld, Kreis Pfaffenhofen
Volksschule	1961 - 1966, Volksschule Manching
Gymnasium	1966 - 1975, Christoph-Scheiner Gymnasium Ingolstadt, Abschluß mit allgemeiner Hoch- schulreife
Studium	WS 1976 - SS 1982, Ludwig-Maximilians Uni- versität München, Diplomarbeit bei Prof. V. Eberhardt, Abschluß Mai 1982 mit Diplom Mathematik
Promotion	WS 1982 - WS 1987, Ludwig-Maximilians Uni- versität München bei Prof. W. Roelcke

